



京都エネカン協会

ENEKAN

Volume 22

特定非営利活動法人(NPO)
京都エネルギー・環境研究協会

2024年7月20日

① はじめに 2 倍喜ぶためには儲けが 2 倍ではダメ	新宮秀夫	1
② 続はじめに 変化の鳥瞰図、エントロピー	新宮秀夫	2
③ 咳をしてもひとり	新宮秀夫	5
④ 高校生に解るエントロピーの教え方	新宮秀夫	6
⑤ 続 高校生に解るエントロピーの教え方	新宮秀夫	8
⑥ 易とエントロピー	新宮秀夫	10
⑦ エネカン通信 4 6 2 号 (乞食と女、0,, 1, ∞)	新宮秀夫	13
⑧ エネカン通信 4 6 3 号 (自由エネルギーと鉄の精錬)	新宮秀夫	15
⑨ Entropy and Negative Entropy	新宮秀夫	17

編集後記：今号は自分で驚くほどフレッシュな気がして繰り返し読んでいます。締め切り間際に見た「鳥瞰図」がヒントで、世の中の「変化」を計るエントロピーを濃度（バラバラ度）と、同じレベルでなく、上空から鳥のような目で眺めるのが濃度を（桁ケタ）で計る方法だと思えば、「エントロピーは濃度の喜び」というような感覚が掴める気がしています。

昨年度から高等学校でエントロピーを教えることになった、と言うニュースを知って、どんなことを教えるのか、エネカン会員や知人のご家族の協力で「化学」の教科書を数種類入手して調べました（本屋では教科書が買えなかった）。そこに書かれていることはエントロピーとは「バラバラさの目安である」と言う記述だけです。バラバラ度を数学的に数値で示すことがされていないのですからこれでは「教科書」と言えません。自分が高校 2 年の時に、数学の授業で「対数」を習ったことをハッキリと憶えています、クラス中で分かった者はいませんでした。対数とは教をケタで数えることだ。と一言教えられていたら、すっかり理解できたのに、と思っています。

物事の濃度は、どれだけキッシリ物が詰まっているかの目安ですから、これはバラバラ度と見て OK です。だから高校ではバラバラさの目安、だなんてアイマイなことではなく、濃度、と言う言葉を使って、エントロピーは濃度（バラバラ度）をそのままではなくて、ケタ（対数）で表現することである。とハッキリと教科書に書かれるべきなのです。不十分な説明をしておきながら、付録の部分には $\Delta G =$ 自由エネルギーが反応の方向を決める。と書かれていました。自由エネルギーとはなにが自由なのか？それは、反応の方向は、異種分子が、化学結合力（ ΔH ）で温度に関係なくガッチリと一体になりたがっているのに対して、どんな分子も種類に関係なく、温度と関係してバラバラになりたい、という願望（エントロピーによる稀薄化の力 $= -T\Delta S$ ）が神様によって与えられているので、それが化学結合力に打ち勝てば、自由に分子が空を飛び回る方向に反応が進むからです。その力の兼ね合いの式が、 $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ として教科書には説明なしに載せられています。

はじめに 2倍喜ぶためには儲けが2倍ではダメ、4倍に増える事が必要

桁で効く：エントロピーの原理

京都エネカン 新宮秀夫

2024/06/30

1865年にクラウジウスがエントロピーという概念を提唱する以前 1738年にタニエル・ベルヌーイは個人の金銭収入額(ダカット)の喜び(効用: emolument)は金額そのままではなく、金額の桁(対数)で決まる、と仮定して、丁半博打(バクチ)の期待値が無限大になる、という数学的難問を避ける事を提唱しました。

更に1800年前後に、薬の摂取量(1人当たりの薬量: 薬濃度)を X とすると薬の効き目 U は、 $U = \log X$ となる、ことがウエーバー・フェヒナーの法則として示されています。つまり効き目を2倍にするためには摂取量 X を2倍ではなく、 X の2乗倍にせねばならない。というのが人間の感覚であることが実験で示されたのです。

これは凄く一般性のある人間の感覚です。良いことが起こる回数を n とすると、 n 回目の喜びは $1/n$ なる。という人間の感覚はとても良く分かります。つまり始めの1回目の喜びが1であるとすると、同じことが2回目なら喜びは $1/2$ 、3回目は $1/3$ の喜びしか得られない、というのが人間の感覚なのです。従って、2回目も3回目も初回と同じ喜びを感じ続けるためには、1回目の利得を X として、 n 回目の利得が X の n 倍ではダメで X の n 乗倍でなければならない。

式で考えると、「物事の喜び U は利得の供給量 X の桁で決まる」というエントロピーの定義、 $U = \log X$ において、 U が2倍になるためには、 $2\log X = \log X^2$ 、すなわち X の2乗にまで利得の大きさが増えることが必要なのです。

このような人間の喜びを感じる感覚を表す数式が自然科学的な状態方程式から導かれるエントロピーの法則と全く同じく、濃度の桁として示されることは、人間が自然の産物であることの証拠なのでしょうか？

数学的なエントロピー式の導出を復習してみましょう。

理想気体の状態方程式: $PV = RT$ として示される圧力、体積、温度の関係を定数 R を1と置いて書き直すと、 $P = (1/V)T$ となります。(液体、固体、も同じ式が成り立つ)。

体積の微少変化を dV と書いて、両辺に掛けると $PdV = T(1/V)dV$ です。左辺は圧力下の体積変化すなわち、仕事のエネルギーであり、右辺は体積の逆数すなわち濃度の関数として放出・吸収される仕事エネルギーの大きさを示す式になっています。

具体的に、体積が任意の値 V から基準値 $V = 1$ まで収縮する時に放出されるエネルギー値を積分の結果として書くと、 $-T\log(V) = T\log(1/V)$ となる。 $(1/V)$ は濃度だから、 $T\log(1/V) = T\log(\text{濃度})$ であり、「エントロピーは濃度の桁」というエネカン流のエントロピーの説明が納得出来ます。

「物事の喜び U は利得の供給量 X の桁で決まる」という人間感覚的エントロピー: $U = \log X$ と、理想気体の状態方程式の示すエントロピー: $S = T\log(\text{濃度})$ とが同じ式で示されていることが分かります。

利得の供給量 X も、物質濃度 $(1/V)$ も、小さく、稀薄、になるのが自然現象だと思えば、エントロピー増大は「法則」なのです。

前頁のエントロピー解説は少々マジメ過ぎたと気付いたので、冊子原稿締め切り過ぎた今日、新聞で偶々読んだ吉田初三郎という画家の「鳥瞰図」という言葉に触発されて考え続けて来たエントロピーは濃度の桁であるという言葉と鳥瞰図（ちょうかんず）の意味とを結びつけて見ました。

鳥瞰とは今の言葉で書けば鳥観でしょが鳥が空高くから地上の景色見のように広く地上の様子を眺める事によって地上の細かい複雑な仕組みを超越して、な～るほど、と理解を深めるという物の見方手法です。

世界中エネカン以外ではエントロピーの真髄を高校生に分かるように説明出来る人がいないのは、エントロピーを鳥瞰しないからです。

鳥瞰するためには、エントロピーの基礎の基礎から考えることが必要です。「はじめに」に書いたように、エントロピーは「変化」という意味なのですが、一体「変化」とは何か、から考えて見ましょう。

江戸時代、駿河の禅僧、白隠（はくいん）さん、は長年説教をしても一向に皆が興味を持って聞いてくれない～～、と嘆いていましたが、ある時にふと「隻手音声（せきしゅおんじょう）」という言葉을思いついて、その意味を信者に話したら、皆が急に興味持ってくれて以後、説教に多くの人が集まるようになった、そうです。

「隻手音声（せきしゅおんじょう）」とは片手で拍手した時の「音」です。

エネカンが会員になっている、身障者の劇団、タイヘン（態変）、の劇をビデオで見た時にメンバーの1人で両手、両足、の無い向井望、という方が劇に加わって演技をされていて感動を頂きましたが、片手の拍手でも音はするのでしょね。

ここで急に「易（えき）」に飛びます。だれもが知っている通り、易といえば、陰--、陽一、の2記号で森羅万象全てを表現する方法です。

易の陰陽の2つの記号の元祖は「大極」という1記号になる。とされていますが、これは易経と言われる易の解釈書の付録、「繫辞上傳（けいじじょうでん）」には書かれていません。

そこには、陰と陽との2つの相対する状態が存在してこそ、陰と陽の割合、と言うような「変化」を記述できるのだ、それはたとえば、器（うつわ）と中にいれる物体、のような仕組みで、器を「形而上（けいじじょう：頭の中だけにアル（形のない概念）」、中に入れる物を「形而下（けいじか：手に取って数えら縷々物）」と見れば良い、と書かれています。

解説するなら、全ての物事は、相対する2つ概念（陰と陽。有と無。善と悪。0と1。1と∞。・・・など）の存在によって初めて状態の「変化」が表現可能になる。ということです。

物事の「濃度（あるいは密度、すなわち器の中の物の量）という概念が「変化」を数字で示すことを可能にしている、と言う納得できる森羅万象の記述原理です。

結局森羅万象の記述は「濃度」という概念を正しく理解すれば OK である、と言うことになるのです。

世の中、暑い寒い、お金がリッチだ、プアだ、と毎日騒いでいるのは全て「濃度変化」を問題にしているのです。

そのような目先の騒ぎ、喧嘩（戦争？）にかまけていると、最善策は見つからない。そこで一段高いところから鳥瞰することが必要となる。

具体的には、物事の変化の基礎である、易で言えば陰陽の存在割合、すなわち濃度を、濃度そのものでは無く濃度の効果を示す、濃度の桁(ケタ)を調べる、鳥瞰法、エントロピーは、ようやく 1865 年に発案されたのです。

易では、八卦すなわち、陰陽の 2 個の組み合わせが 3 組、すなわち 2 の 3 乗=8 組の卦を 2 セット、合計 8×8 組 = (2 の 6 乗) =64 卦の中で陰と陽の個数割合が同一の卦を、ひとつの場合として、場合の数 W を、

$W = 6! / (n!(6-n)!)$ ($0 \leq n \leq 6$)
として数えると解釈できます。

そこで、 W の対数を数える、すなわち W の桁を数えて、どのような W 値が最大になるかを調べると $n = 3$ 。すなわち陰と陽の数が同じ場合は $20/64$ で最大となることが分かります。

結局、易は筮竹（ぜいちく）で陰陽を占うと陰陽同数（善悪半々）の結果が最も出やすい、と言う、熱力学で習う 2 種の異なる物質の混合では割合が半々のときに混合のエン

トロピー最大になる、という結果が 2000 年以上（易の歴史は 3000 年位？）に理解されていたことが分かります。

易の場合は 2 の 6 乗=64 卦の中での場合の数で占うわけですが、エントロピーの計算では総数 64 を 1 と置いて 0 から 1 までの無限の場合の数として、場合の数の分布を調べるのですが、場合の数の数え方の原理は全く同じなのです。

有限値濃度を 1 と置いて濃度 0 までの計算をするのがエントロピー計算の基本です。

しかし、有限値濃度 1 以上の濃度も物理的には、考える事が重要です。すなわち 1 から ∞ までの場合の数 W が計算される必要があります。

すでにエネカン冊子 21 号にこの点は説明済みで、結論は有限濃度 1 と無限濃度 ∞ との「混合」の場合には濃度 2 (=1/0.5) に於いて「混合」のエントロピーが最小、となります。

隻手音声に戻って考えると、1 と 0 との「混合」を考える時には通常手に 1 個の物を持っている手と、何も持たない手とを合わせて（混合する）と考えるのですから、スッテンテンの乞食 1 人と 1 円持っている女との、1 円の分け合い（混合）と見なすのと同じく、打ち付ける相手の手が存在する状況と見なせて、隻手音声ではなく混合結果の答え（音声）が有ります。

しかしながら、もし 1 円持ちの女が、無数 ∞ 人の乞食に出会ったらどうなるでしょう？女の持っている 1 円全部を乞食に与えても乞食はスッテンテンのまんまで、持ち

金に変化は起こりません（変化が無いとは音がしない事です、隻手音声！）。次に、

乞食1人が、無限円のお金を持っていたとしたら、女の1円と、乞食の ∞ 円のお金をいくら混合しても金額は ∞ のまんまで「変化」は無く、音は聞えず、これも隻手音声です。

結局、1円持ちの女1人とスッテンテンの乞食の数とに応じて聞こえる音声の大きさが減って行くと思って、その音の大きさを測るのがエントロピー（濃度の桁）と思うことが出来ます。

つまりエントロピーは濃度だけを見ず、一段高い（桁）という位置から濃度変化を眺める、という意味で濃度を「鳥瞰」する方法だと理解しても良いのでしょうか。

鳥瞰の例をネットからコピーした絵を下記します。



図1 吉田初三郎、鳥瞰図 1928年

濃度の鳥瞰（桁で見る）例も図2に記しました。図中の赤線は濃度を、乞食 ∞ 人から1人、そして、1人から、お金 ∞ 円まで、すなわち、隻隻手声のケースを描いています。右側黒線の最下段の線は普通の混合のエントロピーの線。左側最上段黒線はエントロピー減少のケースです、図3。

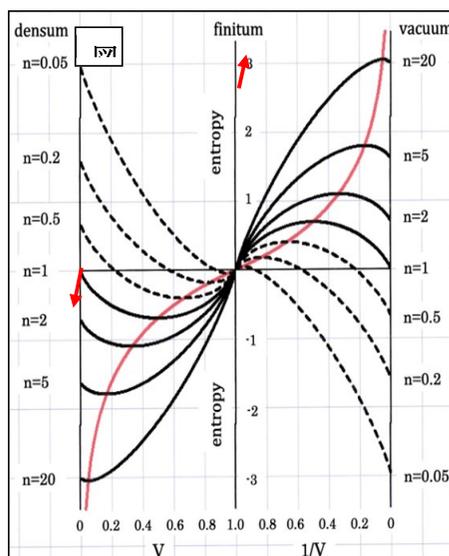
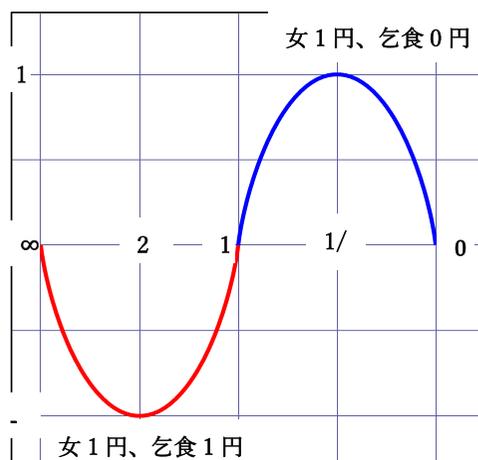


図2 濃度の鳥瞰（桁で見る）例

図3 濃度0から1、1から ∞ までの桁数（エントロピー図。エントロピー増大と減少が鳥瞰される。



咳をしてもひとり？

京都エネカン 新宮秀夫

2006年7月7日

物事の「変化」が森羅万象の基礎である。と気づいて、その変化の基礎は陰・陽で代表される器と中に入れる物という、相対する2つの状態である。森羅万象はたった2つの「ある」と「無い」の組み合わせで表現出来る。易、では3000年も前にこのような、「哲学」だか「数学」だかを述べているのです。しかし、前頁に書いたように、隻手音声、という、「有る、と、無い」という概念もさらに掘り下げると、無限に「有る」、という概念が森羅万象の解釈に不可欠であると分かって来ました。無限に「有る」はまだ分かり易いかも知れませんが、無限に「無い」はちよつと馴染みがないかも知れませんか。スッテンテンの財布1個なら1円貰えば、スッテンテン卒業です、しかし、カラ財布が百個あれば1円もらってもまだスッテンテンに近い。無限個のカラ財布があれば、いくら貰ってもスッテンテン状態は解消されません。これが濃度の鳥瞰すなわちエントロピーの考えなのですが、ま〜、真面目に驚いてもらえるでしょうか？エネカン流は教科書に書かれていない、自分流の納得を求めているので、いつも相手にされず、「咳をしてもひとり」状態ですが、それもユニークで皆同じ状態より面白いかも〜？

中学一年生といえはもう七十年以上昔のことだが、理科の授業で苦境におちいったことがある。先生が水の圧力は十メートルで一気圧になる、だから水深十メートルでは一気圧です、と話された。小生は、地上で一気圧なんだから水に十メートル潜れば二気圧ではありませんか？と質問したのだが、新米の先生には答えられなかった。

困ったのは授業のあとクラス中の同級生が皆、小生の非を追及したことだ。ガキ大将も、優等生も（小生はどちらでもなかった）身振り手まねまでして、空気と水とは別だから水面で区切られて水の圧力だけになる、先生のいわれたように水深十メートルでは一気圧である、オマエは頭がおかしい、と説得に躍起になった。まさに孤立無援である。

今年五月の原子力総合シンポジウムで、エネルギー料金（電気、ガス、ガソリンなど）が安すぎ、大幅に値上げして節約が儲かるようにし、皆が競って省エネするにすべきだ「節約は最大の資源である」という発表をしたところ、大いに賛成、という少数の意見を頂戴したが、多くの人からは「非現実的」であると切って捨てられている。小生は、化石燃料か原子力かという論議の前に、どんなエネルギー源も節約して利用すべきであり、皆が進んで節約するには欲の利用以外にはない、というエネルギー学と自由主義経済学の基本を合わせ述べたつもりである。しかし、それでは景気がよくなる、といった本末顛倒の論拠で、世間ではこれが直視されない。苦境の再来である。咳をしてもひとり、という尾崎放哉の俳句には大いにあこがれるけれども、エネルギー問題に関しては、今の物質的豊かさより将来世代に負の遺産を残さぬことが最優先されるべきであり、そのためには「非現実的」な意見が現実的なのだと納得する人がひとりでも増えてほしい。

エネルギーレビュー誌 300号 2006年1月 随筆

高校生に解るエントロピーの教え方

京都エネカン 新宮秀夫 2024/05/29

2023 年度から高校の化学の授業でエントロピーを教えることが決まりました。エントロピーを如何に教えるのか、文科省の説明と実際の化学の教科書を確認すると、エントロピーは「ばらばら状態の目安である」と簡単に表現されています。ばらばら度と言う曖昧な言葉でなく、何故「密度、あるいは、濃度（一定の密度値を 1 と置いて 0 から 1 までの密度は濃度と呼ばれる）」という言葉を使わないのでしょうか？

中学校で習う理想気体の状態方程式

$PV = RT \cdots \textcircled{1}$ ($P =$ 圧力、 $V =$ 体積、 $R =$ 気体定数、 $T =$ 温度) を書き直すと、

$$P = (1/V)RT \cdots \textcircled{2}$$

となりますが、ここに $(1/V)$ は、体積 V の中にある物質数、すなわち物質の「濃度」です。濃度が大きい時は V が小さい、すなわち物質が纏まって、バラバラさ、が小さい。逆に濃度が小さい時は V が大きい、すなわち物質が大きい体積の中にあり、バラバラさ、が大きいのです。濃度という数値は、バラバラさ、をキッチリと数字で示す指標なのです。

$\textcircled{2}$ 式は濃度に RT を掛けるとその物質が外部に向かって働く「圧力 (P)」になることを示しています。簡単に言えば温度 T が一定の時に「濃度は圧力を示す」のですね。

エントロピー（通常 S という記号で示される）とは、濃度（バラバラ度）そのものではなくて、「濃度の対数」である、と定義されるのですが、「対数」も高校で教えられ、数をそのままではなく数のケタ（桁）、で数えることなのです。

濃度を桁（ケタ）で書くと何が嬉しいのか？ その答えのためには、 $\textcircled{2}$ 式の両辺のどちらにも、微小体積、 dV 、を掛けて微小エネルギー変化を表す式、

$$PdV = (1/V)RT dV \cdots \textcircled{3}$$

という形にすれば、左辺は圧力 P の下での体積微小増加ですから、微小仕事エネルギーです。右辺は、その微小仕事エネルギーの内容が、濃度 $(1/V)$ に定数 RT を掛けた式で表されているので、体積 dV を順次増大させ濃度 $(1/V)$ を下げた時 (dV で積分した時) の仕事エネルギーを V の式として計算出来ます。計算結果は、 $RT \log(V)$ 、となりますが、この式は体積が順次大きくなる時（濃度が順次小さくなる時）の答なので、エントロピーは濃度が順次大きくなる時の値なので答は、 $-RT \log(V) = RT \log(1/V)$ 、となります。すなわち、

$\textcircled{3}$ 式の、左辺、右辺、の dV を積み重ねる計算（積分）は、定数 R を 1 として、

$$\boxed{\text{取り出せる仕事エネルギー} = T \log(1/V) = T \log(\text{濃度}) = \text{エントロピー} \Delta S \times T \cdots \textcircled{4}}$$

という関係を中学校で習う $\textcircled{1}$ 式は示しているのです。

結局、エントロピー S ($\log(1/V)$) = 濃度のケタ、とは、それに温度 T を掛けると、濃度が高い状態から、低い濃度まで（基準濃度まで）変化する時に取り出せる「仕事量」となり、ある濃度状態が「どれだけ役に立ち得るか」を数値で示すものであり、濃度変化が外部に与え得る「emolument = 利得、効用、喜び?」の大きさの指標なのです。

①式は気体だけでなく、液体、固体、にも適用できることはファント・ホッフが示しました（第一回ノーベル賞）。

②式で示されたように濃度が圧力に直結しているのですから、濃度の異なる同じ量の物質が隣接している時には圧力差が生まれます。自然現象として圧力 P は均等になるまで変化します。この時に双方の濃度 $(1/V)$ も同一になりますね（②式で示されている）。

では、濃度がバラバラであった時のエントロピーと、濃度が同一になった時のエントロピーを比較したらどうなるのでしょうか？高濃度を H 、低濃度を L 、最終の均等濃度を F と添え字するとして、対数関数は上に凸ですから、 $\log(1/V)_F$ は、 $(1/V)_H = (1/V)_L$ の時（濃度が均一の時）にエントロピーが最大になります。

「エントロピー増大法則」という誰でも知っている呪文は、なんのことは無い「圧力の部分的な差異が無くなり濃度が均一になる方向に自然は変化する」ということです。圧力が均等になれば、エントロピーに T 掛けた（外部に取り出した仕事の喜び）が最大になり、それ以上の変化の可能性は無くなるのです。

上記の理想気体の状態方程式は中学校で必ず教えられます。数を桁で数える対数と言う概念も高等学校で教えられているのですから、エントロピーは以上書いたように数学的にそして概要を簡明にフォロー出来る教え方を高校で指導出来るはずです。

「ばらばら状態の目安」という言葉は60年ほど昔に大学で先生から聞きましたが、結局同級生の中でエントロピーが解った者は皆無でした。

エントロピーの数学的に簡明な表記は④式ですが、本文の肝心カナメです。再記すれば、

$$S = \log(1/V) = \log(\text{濃度})$$

これが理想気体の状態方程式：①式から導けることを示したのがここに書いた解説です。 $1/V$ の積分が $\log V$ となる計算は証明がやや複雑ですが、帰納的に $\log V$ の微分が $1/V$ になる計算なら高校生にも可能です。

「解る」という言葉は「その意味を人に説明したくなる状態」のことである、とエネカンでは定義しています。

以上の説明でエントロピーが何か、人に説明したくなった方はおられるでしょうか？

「蛇足1」高校生に解るエントロピーの教え方

京都エネカン 新宮秀夫 2024/05/31

エントロピーという概念を高校生にも解るように説明しようと頑張った小文をエネカン通信にお送りしましたが、クドクドした説明より、それでエントロピーって何や？という声が耳の良いエネカンには聞こえてきます。

蛇の絵を人より早く描いてご褒美をもらった人が、オマケを描く余裕がアルと自慢して足を描き足して、足のある蛇はいない、足を描いた絵は蛇と違う！と言われてご褒美を取り上げられた（戦国策）。

エネカン流にヒネクレた考え方をすると、足が描かれることによって蛇には足が無いことに人々は気付く。普通の蛇を描いても人の注目が得られない。この諺が何千年も語り継がれて来たことが面白いですね。

エントロピーという蛇に足を描いてみましょう。

蛇の実態は、

エントロピー S とは何か、それは濃度 $(1/V)$ の桁である。

$S = R \log(1/V)$ R を1と置けば、 $S = \log(\text{濃度}) = \log(1/V)$

S に温度 T を掛けると、濃度変化によって取り出せる仕事エネルギーになる

世の中には濃度で表される事柄が沢山あります。先ず水の中のエチルアルコール、お酒の濃度を考えましょう。

100%アルコールの状態を濃度1、と置けば、80%アルコールのウオトカは濃度0.8です。50%アルコールのウィスキーは濃度0.5です。20%アルコールの一級酒は濃度0.2です。

それぞれの場合のアルコールのエントロピーを考えましょう。1以下の濃度を使う時はエントロピーが負の値にならない様に、 $S = -\log(1/V)$ と置いて計算します。

自然対数、 $\log_e = 2.71828$ を使うと、

濃度1の純アルコールのエントロピーは、 $S_1 = -\log 1 = \log 1 = 0$

ウオトカの中のアルコールのエントロピーは、 $S_{0.8} = -\log 0.8 = \log 1.6 = .22314...$

ウィスキーの中のアルコールのエントロピーは、 $S_{0.5} = -\log 0.5 = \log 2.0 = .69314...$

日本酒の中のアルコールのエントロピーは、 $S_{0.2} = -\log 0.2 = \log 5.0 = 1.6904...$

純水はアルコール濃度が0なのでエントロピーは $\log 0/1 = \infty$ 。

となります。

そこで、瓶一杯のアルコール（濃度1）と同じサイズの瓶一杯の純水（濃度0）とを混ぜると、瓶2本の濃度0.5のウィスキーができます。

アルコールの全量は変わりませんが、濃度が半分に変化したので、瓶 1 本当りのアルコール量は半分（元を 1 とすれば 0.5）に変化しています。従って混ぜる前のアルコールのエントロピーと混ぜた後の瓶 2 本中のアルコールのエントロピーとを較べると、

$$\text{混ぜる前} : S_1 + S_0 = 1.0 \log 1.0 + 0 \log \infty = 0 + 0 = 0$$

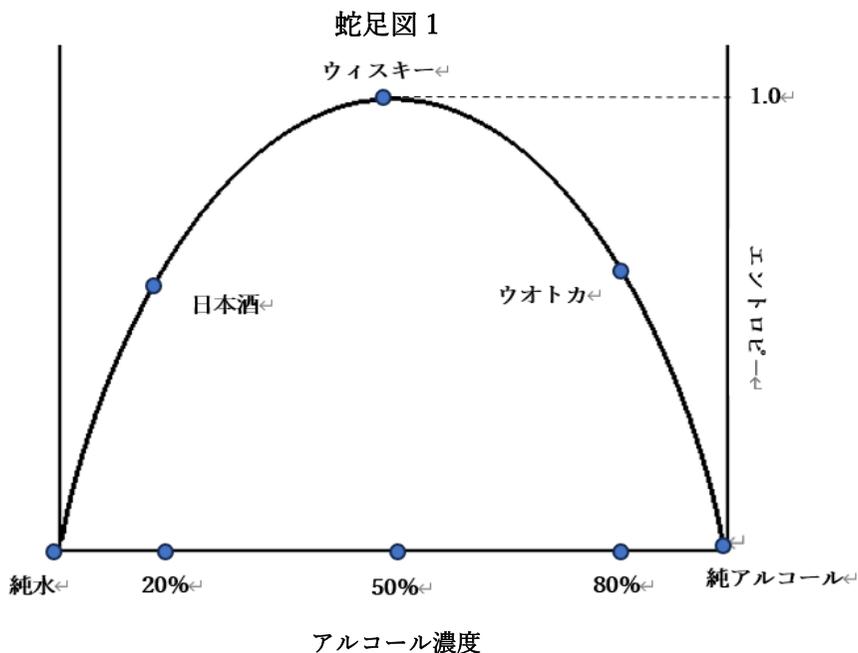
$$\text{混ぜた後} : 0.5 S_{0.5} + 0.5 S_{0.5} = 0.69314\dots$$

対数としてここでは自然対数を使って計算しましたが、底を 2 とする対数により計算すれば、混ぜて濃度が 0.5 になった時のエントロピーは $-\log_2 0.5 = \log_2 2 = 1.0$ となり、純水（濃度 0）と純アルコール（濃度 1）の瓶の中味を混ぜあわせると、その結果エントロピーが 0 から 1（=R）まで増大したことになります。

エントロピー増大分に温度 T を掛ければ、外に向かった仕事（仕事エネルギー放出）ですから、純アルコール 1 瓶を純水 1 瓶と混ぜる時には、外に向かって $RT \log 2$ だけの仕事をするのが可能であることとなります（底 2 の対数なら $\log_2 2 = 1$ なので仕事量は RT）。

エントロピーは、濃度が下がる時に取り出せるエネルギーの大きさを簡単に計算する手段として有用なことが、アルコールを水で薄める事例から納得できました。

半々の混ぜ合わせでなく、アルコールと水とを任意の比率、n と (1-n)、(0 ≤ n ≤ 1) に分けた時のエントロピーは $S_{\text{mix}} = -(n \log n + (1-n) \log (1-n))$ という面倒そうな、どの教科書にも（混合のエントロピー）として載っている式で計算できます。2 を底とする対数を使ってこの式を描いたのが下記した蛇足図 1 です。ウイスキーがエントロピー 1 で最大、日本酒とウオトカとがウイスキーより低い同じエントロピー値になるのが面白いですね。



エントロピーと易との関係、と言うか易のエントロピー的解釈に3月一杯凝っていましたが、ようやく概観が掴めて、今日4月1日 April Fool's Day に相応しいようなマトメを書きました、ちょっと話題に、というツモリでメールします。

易って64組の陰陽6個セットが基本。64卦ですね。基の基は陰1個と陽1個のペアです。つまり相反する事柄、陰と陽と2個。善と悪でも、0と1でも、好きと嫌いでもOK。相対する2個の事柄があれば森羅万象なんでも反対の記号どちらかを6個並べて出来る64個(掛ケ)にそれぞれ意味深長な説明をつけて、筮竹(ゼイチク)を振ってどれかを選び、運勢を知るという作業です。

すべての世の中の自然現象も心の問題なども、ぜ〜んぶ突き詰めれば2個の相対する事柄にポイルダウンして考えるべきだ。と言う2個が全ての基本にある、世の中は2進法で理解すべきだ。3000年前にこんなカンタン至極な真理が自然を支配。そして人間の心も支配している。と達観した伏羲(エネカン冊子3号に4つ目の肖像有り)はやはり神様だったか?それを周という国の王様、文王(こちらは歴史上の人)が社会に広めた!

エネカンではふとした事からこれがエントロピーの基本と同じ原理で解釈出来ることを発見!! 自然の仕組みと人間の考えとが同じ原理で動いている証拠?の説明をenjoyしようとしているいる訳です。

但しエネカンの易の解釈は、世にあふれている易の解釈と少し違う。64個の卦を1つずつ説明するのは大変なので各卦の中に含まれる陰と陽との記号の数の組合わせを考えて、陰陽比率が同じならその組み合わせに属する卦は同じ意味を持つ。と考え、陽印が多ければラッキー、陰印が多ければアンラッキーと見て運勢を簡単に感じ分けられる。と思って見たのです。

64卦の中で、

陰3個と陽3個、を含む卦は20個。

陽4個と陰2個、を含む卦は15個。

陽2個と陰4個、の卦も15個。

陽5個と陰1個、を含む卦は6個。

陰1個と陽5個、の卦も6個。

全陰と全陽、の卦はどちらも1個。です。

これは自然の決めた割合だから、社会には善悪半々の人間が溢れているのがアタリマエ。極端に良い奴は1/64位、極端に悪い奴も同じくらい少ない、けど、何のかの言ってもそんな奴もいる。と言う風に解釈するのがエネカン流。

これを数式で示して、算数のワカラン人もなるほどと言わせることを考えたので下記します。

式は簡単です。基礎式は、

陰と陽との記号の数の組合わせ比率が同じ卦の数は、

$$6!/((n!)((6-n)!)) \quad (0 \leq n \leq 6) \cdots (1)$$

具体的に計算すると、 $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ 、 $1! = 1$ 、 $0! = 1$ 、なので、

$$6!/((3!)(3!)) = 20, \quad 6!/((2!)(4!)) = 15, \quad 6!/((1!)(5)) = 6, \quad 6!/((0!)(6!)) = 1$$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 、 $0! = 1$ という算数ルールさえ知っていればエネカン会員も納得ですね。

ここで易からエントロピーに飛躍します。

式 (1) の 6 を一般化して N と書けば。

$$N!/((n!)((N-n)!)) \quad (0 \leq n \leq N) \cdots (2)$$

となります。これはエントロピーの解説のどの教科書にも載っている式で、エントロピー理論の元祖の 1 人ボルツマン氏のお墓に書かれている

$$S = k \log W$$

と言う式から定数 k を省いて

$$S = \log W \quad \text{すなわち}$$

$$S = \log(N!/((n!)((N-n)!)))$$

と書いて W は、通常この $N!/((n!)((N-n)!))$ の式で解釈されて、N 個のものを n 個と N-n 個とに分ける場合の数がこの式を指しているのです。

簡単にエントロピーはこの W において $N=1$ と規格化して一般性のある書き方に置き換えて

$$S = -(n \log n + (1-n) \log(1-n)) \quad (0 \leq n \leq 1) \cdots (3)$$

として理解されます。(易の場合には、対数 $\log_2 n$ という風に対数の底を 2 として考える)

何の事はない式(3) は合金学の基礎で、例えば金と銀との割合を n として合金するときのエントロピー値であり、合金化を進める駆動力である自由エネルギーを評価する基礎式なのです。

エントロピー増大は混合を半々に向かわせる自然の力の元だと解りますね。

エントロピーとは数を桁ケタで書くことだ、桁は数の示す喜びだ。というのがエネカン流のエントロピーでしたね。

式 (3) を使えば、64 卦の中の陰陽半々のセット、 $n = 0.5$ においてエントロピーは 1

($-\log_2(0.5) = 1$) となり(喜び)が最大になります。

このような易の卦の組の存在率図と、これを元にして計算したエントロピー評価図、とをセットにした世界一の図を作りました。ファイルで添付しました、お楽しみ下さい。

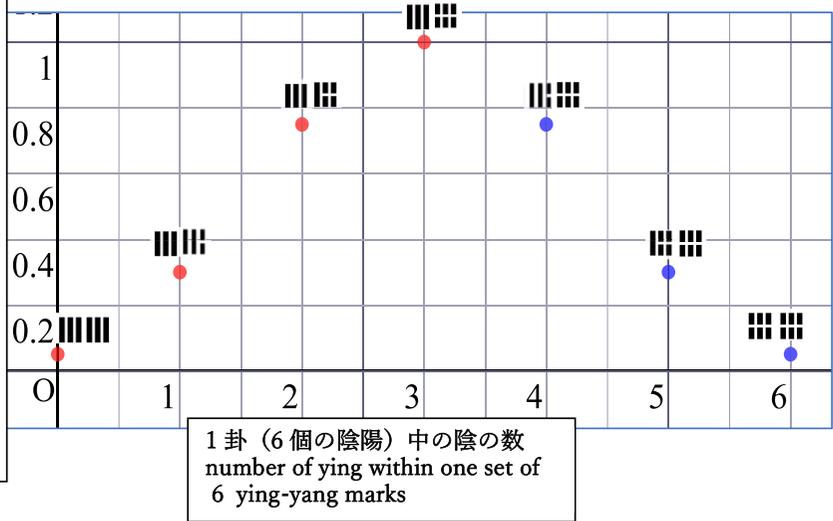
分かってもワカランでも返事ください。

京都エネカン 新宮秀夫 これ英語にして世界に発表のつもり、ご意見待ってます。

Tel 090-6259-9536 shingu@enekan.jp <http://www.enekan.jp/>

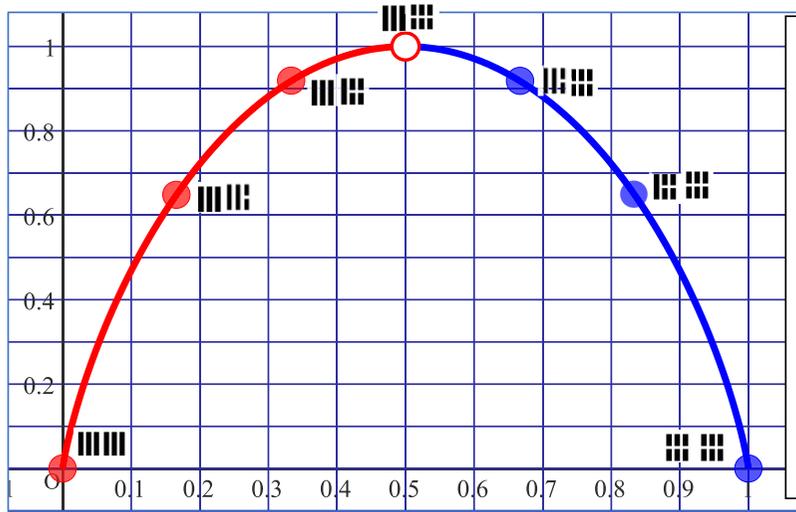
易 64 卦の陰陽組み合わせ状態を調べると、陰-陽と数えて、0-6, 1-5, 2-4, 3-3, 4-2, 5-1, 6-0 で、その中 3-3 の卦が一番多い。陽を good, 陰を bad, と解釈すると、筮竹で中吉を引く確率が最大。ここでは中吉はエントロピー最大であり中吉こそ大吉だと証明できた。

1 卦 (6 個の陰陽) 中の異なる陰陽数組み合わせの存在比率 (陰陽同数、3 個の場合 1 とする)。ratio of existence of yin-yang sets relative to the 20 even yin-yang sets.



易では陰陽印 6 個のセットを卦(け)と呼んで、64 (=2 の 6 乗) 個存在する異なる卦、のそれぞれに意味深い特徴が書き記されている。我々は筮竹 (ぜいちく) を振って 64 卦のいずれかを引き当て、運勢を占うことができる。

陰陽同数	☰☷	$6!/3!(6-3)! = 20$	陰陽を 3 個ずつ順序を変えて混合する方法は 20 個
陰 2 陽 4	☱☳	$6!/2!(6-2)! = 6!/2!4! = 15$	陽 4 個 陰 2 個、を混合する方法は 15 個
陰 1 陽 5	☲☶	$6!/1!(6-1)! = 6!/1!5! = 6$	陽 5 個 陰 1 個、を混合する方法は 6 個
陰 0 陽 6	☰☰	$6!/6! = 1$	全陽、全陰、はどちらも 64 卦中に 1 個



易の卦の中の陰の割合に応じたエントロピー値。
 陰陽半々の卦に於いてエントロピーは最大 1。全陽、全陰、の卦ではエントロピーは 0 となる。
 $S = \log(N!/((n!)(N-n)!))$
 by putting N as 1
 $S = -(x \log x + (1-x) \log(1-x))$
 (0 ≤ x ≤ 1)
 京都エネカン 2024/04/01

「エントロピー」の真髓が世界一カンタンに分かって日常生活の中でオモシロク便利に使えるようになるお話をする予定です。

温度は勝手に冷えるけど、勝手には暖まらない。
濃い酒は水で薄まるけど、水を抜いて濃くするのは大変。
サイフのお金をバラマクのは簡単、元の額まで集めるのは大変。

数式を見るとアレルギーの出るお方様用の説明、物事の変化を感じる感覚は、濃度（パラバラ度）すなわち、どの方向に変化するかの圧力を感じることによっている。しかし、圧力（力）は目に見えないから、目に見える、変化の目安が欲しくなり、その答えが「エントロピー: 通常 S という記号で表される」という工夫だ。と理解すれば良い。そう見れば、それを高校生にまで教える意味が分かるだろう。しかもその工夫（エントロピー）は濃度をケタで数えた桁数という簡単至極なものなのです。

世界中に、女 1 人、乞食 1 人という 2 人社会があるとして社会の全資産が 1 円だとしましょう。（乞食と女：村山槐多）

資産の分配法を考えると、女 1 円、乞食 0 円が始まり。
とすると、お金濃度は女 1、乞食 0 です。濃度を 2 の桁(ケタ)で見ると、それぞれの桁数は女 0（2 の 0 乗は 1）乞食 $-\infty$ （2 の $-\infty$ 乗は 0）です。所持金額（女 1 円、乞食 0 円）にケタを掛けたもの：「エントロピー」は、
 $S = 1 \times 0 + 0(-\infty) = 0$ 、となります。

次に女 50 銭（0.5 円）乞食 50 銭（0.5 円）に分配が変わると、0.5 は 1/2 すなわち 2 の逆数（2 のマイナス 1 乗）だから、0.5 のケタは -1 になるのでマイナスを無視すればケタは女も乞食も 1 です。それぞれの所持金は 0.5 円なので 2 人分のエントロピー（所持金のケタ数掛ける所持金額）は、
 $S = 0.5 + 0.5 = 1$ 、となります。

そして、女が全額を乞食に与えて自分がスッテンテンになった場合のエントロピーは始めに考えた女 1 円乞食 0 円と全く同じで、
 $S = 0$ となります。

結局、エントロピー（濃度数のケタ）という指標は、社会の資産 1 人占めの状態から資産が社会全体に均一な濃度に分けられると増大するという性質を持っています。資産を均等に分けた場合がエントロピーは最大になります。均等以外の分け方ではエントロピーが小さい、均等分割は変化のドンズマリ。

数式を見ないと納得できないお方様用の説明 温度 (=熱エネルギー濃度)、お酒 (=アルコールの濃度)、サイフ中のお金 (=お金の濃度) と一括して何でも濃度で表せる物事について、濃度は理想気体の状態方程式、 $PV = nRT$ を書き替えて $P = (n/V)RT$ と書けば解るように、 (n/V) は濃度だから、濃度は圧力 P を生むのが 自然現象。濃度が高い物質状態は膨張して濃度を下げる方向に圧力 P が働く。

圧力 P の下で体積が膨張すれば仕事エネルギーが発生する、体積膨張につれて発生する仕事エネルギーを計算する式は理想気体の状態方程式を使えば $n(1/V)RT$ の dV による積分となり結果は $nRT \log V$ となる。逆に見て濃度の高い物質状態は積分を逆に計算した結果とみれば濃度の高い物質は $-nRT \log V = nRT \log 1/V = nRT \log(\text{濃度})$ のエネルギー放出の可能性を持つ。 $\log(\text{濃度})$ は濃度の対数すなわち濃度の桁 (ケタ) であり通常 S という記号で示され、それがエントロピーと呼ばれるパラメーターである。濃度低下によるエントロピー増大量を ΔS とすれば、 RT を掛けた数値、 $-RT\Delta S$ は、ある濃度の物質が濃度低下(膨張)により放出するエネルギー量を示すことになる。化学反応の起こり安さを示す自由エネルギー、 $\Delta G = \Delta H - RT\Delta S$ の式においてエントロピー変化 ΔS は反応に付随する体積 (濃度の逆数) 変化の必然的な作用を示している。

感動は前進、満足は後退 <https://www.youtube.com/watch?v=rb2N9FHMUUs>



村山槐多の「乞食と女」(1917年画)

母校 洛北高等学校の同窓会室にある名画のコピー

村山槐多は洛北高校の前身、京都第1中学校の出身。

早世の天才。

今回のエントロピー説明の参考に使わせてもらった。

なんでも濃度で表される物事の濃度そのものでなく濃度の桁（対数）が喜びの尺度すなわち「エントロピー」だ。なんて聞き飽きた、それで何が：嬉しいんや?!といわれそうなムードですね。

数式アレルギーの会員（自分を含めて）に分かるエントロピーのアリガタサを昨夜寝ずに考えました。

自由エネルギー、 $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ 、が化学反応の進行方向を決める尺度です。

Δ という記号は何でも変化の前後での値の差を示す記号。 ΔH は変化に伴って放出・吸収される化学結合エネルギー量、 $T\Delta S$ は濃度変化（体積変化の逆数）にに伴って放出・吸収されるエネルギー量です。

なんでも変化が起こるためには変化に伴う自由エネルギー ΔG がマイナスにならなければなりません。化学結合のエネルギー ΔH は通常プラス、変化にともなう体積変化が膨張ならエントロピー変化 ΔS もプラス、したがって $-T\Delta S$ はマイナスになる。結局化学結合が壊れてバラバラになる条件は化学結合エネルギー ΔH にエントロピーの効果 $-T\Delta S$ が打ち勝つことが必要なのです。

具体的例として何故、鉄鉱石（鉄が酸素と強く結合した物質）が炭素（石炭・コークス）で還元できて純鉄として毎日利用できるのか、これがエントロピー変化のおかげ様であることを見ましよう。

普通、鉄 Fe をはじめほとんどの金属元素は酸素と結合（酸化）して固体の酸化物になります。ところが、炭素 C は酸素と結合（酸化）して気体になるという特徴があります。酸化鉄 FeO（黒っぽい粉）と炭素粉を混ぜて数百度以上に熱すると、2酸化炭素（炭酸ガス）や一酸化炭素（気体）を出し続けます。ガスの排出が終わったら容器の底には純鉄ができています。

酸化鉄と炭素は固体ですから体積は小さい（濃度が大）、CO₂も CO も気体ですから、元の鉱石と炭素を合わせても体積は出来た気体の数万分の1しかない。従って固体の炭素が鉄鋼石から酸素を剥ぎ取り、純鉄が出来ると体積が数万倍に膨らむのです。体積の逆、濃度の桁がエントロピーなのです。鉄鉱石が炭素で還元されて、 $-T\Delta S$ は大きいマイナス値になり、 ΔH をし

のいで自由エネルギー ΔG をマイナスに導く、すなわち鉱石の還元反応を進める結果になるのです。

クダクダ説明しましたが、一言でいえば、炭素 C が酸化鉄 FeO から酸素 O を奪い取って純鉄を作る能力を持つ原理は、反応により体積が膨張し、エントロピーが増大するためであると言えるのです。エントロピーの有り難さが実感出来たでしょうか？

感動は前進、満足は後退

<https://www.youtube.com/watch?v=rb2N9FHMUUs>



庭に毎年咲く露の花。スケッチ by Takeba Yasuko 2021

Entropy and Negative Entropy

Kyoto Enekan Hideo Shingu

(I) Introduction

The entropy of mixing which is expressed as

$$S_{\text{mix}} = -(x \log(x) + (1-x) \log(1-x)) \cdot \cdot \cdot (1)$$

where x ($0 \leq x \leq 1$) is the fractional density of materials. The standard state $x = 1$ means one unit amount of material contained in unit space (hence $1/x$ corresponds to the volume of materials).

In thermodynamics the equation (1) which takes only positive values according to the 2nd law, which means the entropy always increase by mixing two different state of materials.

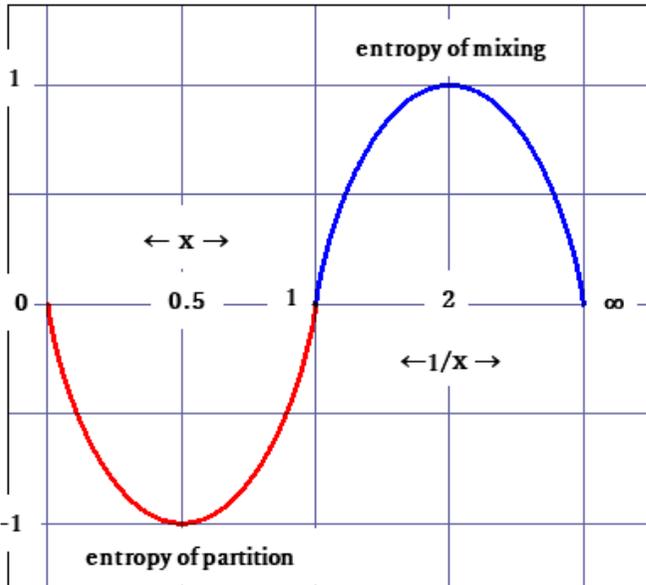
Purely mathematically, however, the existence of negative of mixing entropy

$$S_{\text{part}} = x \log(x) + (1-x) \log(1-x) \cdot \cdot \cdot (2)$$

which takes always negative values is as natural as equation (1).

Present article examines the physical meaning of eq.(2) to conclude that the so called 2nd law of thermodynamics (the increase of entropy) is valid only under a limited condition.

(II) The reason why the 2nd law of thermodynamics is not a general law.



(a) Entropy of mixing

In one atmospheric pressure one mole of molecule takes 22,400ml of space at room temperature. It may be natural for everyone to set this volume of molecule as the standard state, which means this state corresponds to $x = 1$ in eq.(1). $x = 1$ means the standard volume of molecules $V_0 = 1/x = 1$. Then at the state of $x = 0.5$ the volume becomes $V = 1/0.5 = 2$.

When one mole of vapor at standard state is mixed with the vapor of different kind of molecules which is also in standard state (which is the same as the mixing with the same volume of vacuum space according to the Dalton's rule) the entropy of the initial vapor changes according to the ratio x of

Figure (1). The graphical presentation of entropy increase due to mixing and entropy decrease due to partitioning. Given by the equations (1) and (2).

existence of one mole of molecules expressed in eq.(1). The eq.(1) can be expressed as,

$$S_{\text{mix}} = -(x \log(x) + (1-x) \log(1-x)) = x \int_1^{\left(\frac{1}{x}\right)} (x) d\left(\frac{1}{x}\right) + (1-x) \int_1^{\left(\frac{1}{1-x}\right)} (1-x) d\left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot \cdot \cdot (1)'$$

In short eq.(1)' shows the entropy change process due to the mixing of one unit of standard state vapor with one unit of vacuum. The maximum of S_{mix} means the entropy value when one mole of standard state vapor is mixed evenly in the 2 volumes of vacuum space resulting in the entropy "increase" of 1 when the base of logarithm is 2. Usually entropy increase is easy to image because it is the process of mixing of standard state of vapor with one or more units of vacuum space.

The process of mixing entropy change is shown as the right hand side blue colored curve of Fig.(1).

(b) Entropy of partitioning.

In this section the entropy change due to the contact of standard state vapor with the infinitely dense state of one unit of molecules which is termed in this article as the "densum" state in order to contrast it with the "vacuum" state.

Densum state may be visualized by the image that one unit of molecules existing in zero space. It can be understood that one unit of densum when mixed with one unit of vacuum produces one unit of standard state of vapor.

The process of change of entropy when one standard state vapor of kind1 is in contact with one unit of kind2 in densum state can be mathematically expressed by the eq.(2) when x in the equation is understood as the ratio of partition of unit amount of volume of space between kind1 side and the kind2 side. It should be noted in this case that x means the fractional volume which belongs to one unit of molecules. $x = 1$ means that total volume of space belongs to the kind1 side while $x = 0$ means that total volume of space belongs to the kind2 (initially densum) side.

Since the estimation of entropy in this case corresponds to the process of partitioning of one unit of volume between two different kinds of molecules, the calculated result may be called the entropy of partitioning.

Mathematically, the eq.(2) can be expressed as,

$$S_{\text{part}} = x \log(x) + (1-x) \log(1-x) \\ = x \int_1^x (1/x) d(x) + (1-x) \int_1^{1-x} (1/(1-x)) d(1-x) \cdot \cdot \cdot (2)'$$

The process of partitioning entropy change is shown as the left hand side red curve of Fig.(1). The minimum of S_{part} means the entropy value when one mole of standard state vapor of kind1 molecules and kind2 molecules are partitioned evenly in the 0.5 volumes of vacuum space resulting in the entropy "decrease" of -1 when the base of logarithm is 2.

(c) Change of standard state

In conventional thermodynamics, it is said by any change of state results in the increase of entropy. By looking at Fig.(1) one may understand that in the case of partitioning, entropy can decrease quite naturally just as the inverse process of entropy increase in the case of mixing. The reason for such

conventional view may exist by the reason that since the entropy always increases when things in the standard state are mixed with the vacuum. Hence when one chooses standard state as an arbitrarily “dense” finite state, the mixing of such state with one unit or more of vacuum space always produces the increase of entropy. However, it must be understood that the infinitely dense state which means one mole of molecule in zero space cannot be set as the standard state. If it is the case the term partitioning becomes meaningless. The situation is the same with the case of mixing. When the standard state is chosen as the infinitely dilute state, namely the existence of one mole of molecules in infinite large vacuum space, the discussion of mixing process becomes meaningless.

(III) Physical image of mixing and partitioning of standard state.

(a) Explanation by illustration.

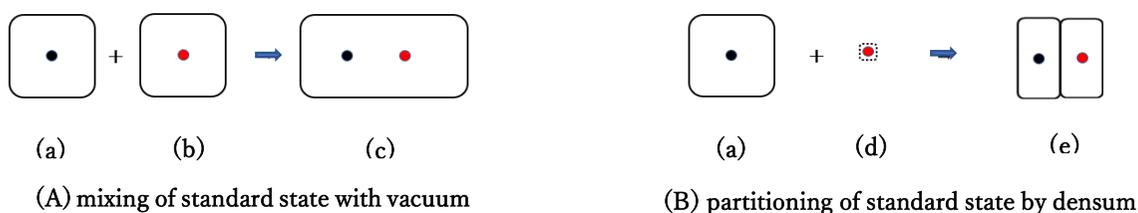


Figure (2). Model images of change of standard state due to the mixing with vacuum or due to the partitioning by densum.

Black mark ● represents one mole of molecules of kind1.

Red mark ● represents one mole of molecules of kind2.

(a) standard state (one mole of molecules of kind1, in one unit of vacuum space).

(b) one unit of vacuum space for molecules of kind1 (contains one mole of molecules of kind2).

(c) equally mixed state (one mole of molecules each of two kinds in two units of vacuum space).

(d) one unit of densum (one mole of molecules of kind2 in zero unit of space).

(e) one mole of molecules of kind1 and kind2 each contained in 1/2 unit of standard volume.

Fig. (2)-(A) shows the images of the physical situation in eq.(1) when $1/x = 2$. The graphical image of which correspond to the peak of the blue curve in fig.(1).

Fig.(2)-(B) shows the images of physical situation in eq.(2) when $x = 1/2$. The graphical image of which correspond to the minimum of red curve in fig.(1).

The crux of the entropy estimation by the equations (1) is to understand that for the molecules of kind1 the existence of kind2 molecules can be regarded equal to vacuum. The kind2 molecules only provides to the kind1 molecules the vacuum space into which it can expand (fig.(2)-(A)).

The kind2 molecules when it exist as densum state, on the contrary, acts only to deprive from kind1 molecules off the existence space by expanding itself to the equal volume as the kind1 molecules (fig.(2)-(B)).

(b) An example of experimental simulation of partitioning.

The model of decrease of entropy shown in fig.(2) can be experimented by putting one mole of solid CO₂ (dry ice) which has the volume of only 28ml (near densum state) into one mole of standard state N₂ (nitrogen molecule) gas (22,400ml at room temperature) wrapped in an airtight expandible bag. The dry ice will eventually be warmed up to the room temperature gas of volume 11,200ml by devouring the volume of N₂ gas until it shrinks to the same volume (half the initial state), causing the entropy decrease of N₂ from 0 to -1 as in accordance with the $x = 0.5$ of eq.(2).

(IV) Generalization of entropy of mixing and partitioning

So far, in order to understand the negative values of entropy, the mixing and partitioning of one unit of standard state of molecules with also one unit of either the vacuum or densum state of different kind of molecules.

In this section further consideration of the existence of both positive and negative entropy values will be given by showing the extended graph of fig.(1) which is the case of, mixing or partitioning of one unit of standard state molecules of kind1 with n units of either the standard state or the densum state of kind2 molecules. Equations (1) and (2) with increased n values are as follows,

$$S_{mix} = x \log(1/x) + (1-x) \log(n/(1-x)) \cdot \cdot \cdot (3)$$

$$S_{part} = x \log(x) + (1-x) \log((1-x)/n) \cdot \cdot \cdot (4)$$

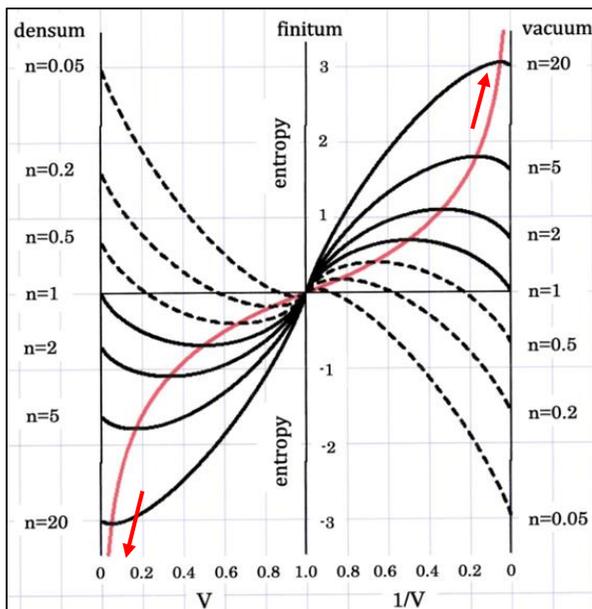


Figure (3) Series of curves of mixing or partitioning of standard state with n units of either vacuum or densum given by the eqs. (3) and (4).

Fig.(3) is the results of plotting of eqs.(3) and (4) using the natural logarithmic scale.

The right hand half of the plot shows change of the mixing entropy due to the mixing of standard state with the increased number n of vacuum units. The left hand half of the plot shows change of the partitioning

entropy due to the partitioning of standard state with the increased number n of densum units.

The red line which is the trace of the peak positions of increased or decreased values of entropy shows simply the value of partial molar entropy or the self-entropy (surprisal) in information theory, which are nothing but the indefinite integral of $1/x : \log(x)$.

The red arrows indicate the direction of increase or decrease of entropy due to the increasing number of vacuum or densum units n which appears in the eqs.(3) and (4).

(V) Discussion

(a) The logarithmic expression of entropy.

The concise and mathematical presentation of entropy increase and decrease in chapter (I) is based on the fact that entropy is expressible by logarithmic function.

Appearance of logarithms is common in various cases where the utility of the magnitude of some quantity N becomes a problem.

(a-1) In this connection the first mathematically detailed discussion was done by Daniel Bernoulli (1) in his 1738 paper, for solving the mathematical riddle of the infinitely large expectation value in the case of coin-throwing gamble. Bernoulli proposed there that the utility of earned money N should be evaluated not by N itself but by $\log N$ for the expectation of gain (referred to as the Saint Petersburg problem). Bernoulli explained the logarithmic expression of utility as follows: when one has 1 ducat the impact of that 1 ducat is $1/1 = 1$ while when one has N ducats the same 1 ducat of money gives impact of only $1/N$.

Since the total impact of sum N of money should be the integral of impacts $1/N$ from $N = N_0 = 1$ to N to result the logarithmic utility $\log(N/N_0)$ Bernoulli set the value of $N_0 = 1$ and did not mention about the case when $N_0 < 1$, which is the case analogues to the consideration of negative entropy region in thermodynamics.

(a-2) The logarithmic decline of the efficacy of drug which results the exponential increase of necessary dose was discussed by the end of 18th century by Ernst Weber and is now called Weber-Fechner law(2). They explained the reason for the effect using the Bernoulli's theory of utility explained above.

(a-3) The marginal utility theory in the field of economics was developed starting around early 19th century by several economists(3). They claimed that utility of assets N of a person can be expressed as $1/N$ and called the original equation, the derivative of which results such utility value, the utility function. Simple consideration tells the utility function should be logarithmic in order to

to keep the utility value always as $1/N$. When $N = 1$ the utility should be 1, so that the term “marginal” meaning the “added utility” is coined for the value of $(1/N) - 1$.

(a-4) The concept of thermodynamic entropy was initiated by Sadi Carnot(4) who noticed the utility of one unit of heat is inversely proportional to temperature T (the density of phlogiston) that is $1/T$. So that one unit of heat at high temperature T_2 can be transported to the low temperature T_1 to produce work energy by the efficiency of $\eta = (1 - T_1/T_2)$.

This reciprocal temperature principle of utility is employed by Rudolf Clausius(5) who noticed that total utility of heat at temperature T must be the integral of inverse value of temperature, as $dS = dq/T$. Since $dq = CdT$, when the heat capacity C is constant, the integration produces the logarithmic expression of entropy $S = R \log T/T_0$ for ideal gases where T_0 is the arbitrary reference (standard) temperature.

(a-5) The entropy treated by statistical mechanics is summarized by Ludwig Boltzmann's(6) equation $S = k \log W$. The constant k is the parameter attached to match the entropy value with the entropy derived from the thermodynamic equation of state of ideal gas. W is the statistically calculated number of states allowed for various classifications of N molecules. The logarithmic expression is not the consequence of statistical calculation but is artificially employed in order to match the result with the conventional thermodynamics.

(b) Entropy as magnitude

Stanley Pogson(7) in his paper(1856) defined the brightness magnitude of stars by logarithmic function. He defined the stellar magnitude as $M = -\log_{2.512}(L/L_0)$ where L_0 is the light intensity of magnitude 0 star (approximately corresponds to the fixed star Vega). The brightness magnitude of the sun is about -26.7 and that of the full moon is about -12.6. A star with brightness magnitude greater than 6.5 is hardly visible by the naked eyes.

The magnitude of earth quakes was defined by Charles Richter(8) in his 1935 paper, by the logarithmic equation $M = \log_{31.6}(E/E_0)$ where E is the released seismologic energy by one earthquake and $E_0 = 15\text{kcal}$. Richter defined the value of E_0 in order to set the magnitude 3 earthquake as almost unnoticeable to people. So that the magnitude 0 quake releases seismologic energy of 15kcal that is about the energy of several pieces of candies. Earth quake of minus magnitude may not noticeable but the seismic energy is not 0.

The magnitudes expressed in logarithmic scale here for the cases of the brightness of stars and the severity of earthquakes are mathematically the same in the sense with the thermodynamic entropy.

So that magnitudes and entropy take both plus and minus values. The importance of the choice of standard state must be understood when the logarithmic scale is used in any field of study.

(c) Entropy in information science

The mathematical expression of information entropy, the Shannon(9) entropy, is exactly the same as eq.(1) when x in the equation is interpreted as probability $P(x)$.

The right hand half of fig.(1) hence is the same figure used for the visualization of information entropy.

If the notion of densum and the negative values of entropy discussed in this article is applied to the theory of information entropy, the negative values of entropy corresponds to the cases of probability values more than 1.

If the probability is defined as an equal notion of density of something contained in an unit space, there is nothing strange about thinking the case of probability over 1 since density can take the any value from zero to infinity with some standard value 1 in between.

Then, what is probability 2 ? Presently no clear explanation of probability 2 can be given here but the entropy of probability 2 is $-\log_2 2 = -1$ and entropy of probability 1/2 is $-\log_2(1/2) = 1$. So that the addition of these two entropies produces the entropy of 0 which corresponds to probability 1 state.

The probability 1/2 is usually referred to as the state of total loss of information, hence, probability 2 state may mean the state opposite to such information-less state that acts to recover the full-information state.

(d) Irreversibility rule applies both for entropy increase and entropy decrease phenomena.

It is usually discussed that when the state of things become equilibrium in density with surroundings, it can not be recovered to the initial state without outside help. Since the equilibrium usually means the maximum entropy state, the 2nd law of thermodynamics are thought to be the evidence of irreversibility of natural change of state.

It seems natural to observe the hot water in a cup cools down when left in room temperature and it does not get back to the initial hot state unless heated.

However, the existence of equilibrium state both for entropy maximum and minimum states shown in figs, (1) and (3) suggests that the irreversibility is not restricted to occur for the entropy increase case.

The entropy decrease which occurs when things in standard state are exposed to densum and reaches to the lowest point, which means the equilibrium state, higher entropy state cannot be recovered without outside help.

(e) Entropic force

The term “entropic force” can readily be understandable since a typical example exists in the equation of state of ideal gas : $P = RT(1/V)$. In this equation P is the pressure (= force) and the result of the partial differentiation by x of the entropy S_{mix} or S_{part} in eqs.(1) and (2) at constant T .

Referring to the eqs.(1) and (2) the entropic force which acts to expand or contract the volume of things corresponds to the slope ($= dS_{\text{mix}}/d(1/x)$) of the blue curve (for $1 \leq (1/x) \leq 2$) or in the red curve to the slope ($= dS_{\text{part}}/dx$) in the range of (for $0.5 \leq x \leq 1$).

Entropic force P may thus acts both to let initial state to expand or contract according as the mixing or partitioning of initial state.

One of the typical example is the osmosis of solutions. As Van't Hoff(10) found out that the equation of state of the ideal gas is also applicable to the liquid or solid solutions which are over 10^3 times denser than the gas state, the the osmotic pressure P can be very high and can act both as expanding and contracting force.

There are much denser state existing in the universe like neutron stars or black holes, so that these state may arise the entropic force both as the contracting or expanding force of materials depending upon if it is appropriate to think about the mixing with vacuum state or partitioning with densum state.

(f) Temperature as the density of thermal energy

So far the entropy of mixing and partitioning are discussed mainly by using the density of material contained in vacuum space. As mentioned in (a-4) section above, the notion of entropy in thermodynamics was first introduced from the utility of the density of heat energy which is temperature T .

The automatic cooling of hot water may be an example of entropy increase so that if we claim the entropy decrease, does it happen in some condition temperature of materials gets hotter automatically?

In this case, the notion of vacuum corresponds to the absolute zero temperature and densum corresponds to the infinitely hot state. By such understanding of the two terminal sate of density of thermal energy, the discussion of negative entropy state discussed in this article can fully be applied to the case of discussion over temperature.

In the case of entropy of temperature, however, some discussion must be made since the 3rd law of thermodynamics claims that the entropy at absolute zero degrees is zero. The re-examination of the 3rd law of thermodynamics becomes an issue here but it is not further discussed here.

(VI) Conclusion

The second law of thermodynamics states that in natural change of states entropy always increase. In this article it is pointed out that the 2nd law is valid only for a limited case where the standard state of materials is mixed with vacuum.

When the notion of densum (the state of materials contained in zero space) is taken into consideration, by the partitioning of standard state material with densum the decrease of entropy occurs equally naturally as the case of entropy increase.

The generalization of the notion of densum leads to the concept of probability of more than one. Probability 2 may sound odd for us but the entropy of probability 2 is -1 and the entropy of probability 0.5 is 1. Consequently, the addition of entropies of these two states results the entropy 0 state which corresponds to probability 1 state.

References

- (1) Daniel Bernoulli : "Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis" Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Tomas V, (1738), pp175-192. ECOMOMETRICA (Journal of the Econometric Society, "Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk": Translated by Dr. Louise Sommer, (1954) pp23-36). ↑
- (2) G.Fechner "Elements of Psychophysics vol.1"(1859): Translated by H.E.Adler, Henry Holt Edition in Psychology (1966)197.
- (3) W. Stanley Jevons: The Theory of Political Economy (1871): Reprint. Edited by R. D. Collison Black. Harmondsworth: Penguin Books, 1970.
- (4) Sadi Carnot: Réflexions sur la puissance motrice du feu, Paris (1824).
- (5) Rudolf Clausius: Annalen der Physik und Chemie, 125-353-(1865).
- (6) Ludwig Boltzmann (1866). "Über die Mechanische Bedeutung des Zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie". Wiener Berichte. 53: 195–220.
- (7) Norman Pogson: The Definition of Stellar Magnitude (1856): D. Jones, : Astronomical Society of the Pacific Leaflets, Vol. 10, No. 469, No. 469, p. 145-152 (1967).
- (8) Charles F. Richter: An Instrumental Earthquake Magnitude Scale, Bulletin of Seismological Society of America, Vol.25, January, (1935) No.1
- (9) Shannon, Claude E. "A Mathematical Theory of Communication" Bell System Technical Journal 27 (3): 379–423, (July–October 1948).
- (10) Van't Hoff JH (1901) Osmotic pressure and chemical equilibrium. Nobel Lecture December 13, 1901.

入会申込書

京都エネルギー・環境研究協会
代表 新宮秀夫 殿
私は本会の設立趣旨に賛同し、入会致します。

会員種別： 正会員、 賛助会員、 学生会員 (いずれかに0印)、口数：()
氏名：
住所：
学生の場合、学校名：()
e-mail：()
tel：()、fax：()
会の活動に関する通知方法： 特別な場合以外は e-mail でおねがいします。
この会を知った方法： 会員の紹介()氏)、ホームページをみて、
その他()
この会に期待することなど、あればお書きください。

(この入会申込書をコピーしてお使いください)

e-mail : shingu@enekan.jp

HP : <http://www.enekan.jp/>

TEL&FAX : 075-722-1223

エネカン会費の納入口座を更新しました。よろしくお願い致します。

エネカンの年度は6月からですが、すでに待ちきれずに？振り込みをされた会員も多くおられます。ご支援ありがとうございました。

毎年会費振り込みの口座名、宛名をどう書くか？という質問が幾つか来るので、簡明な振り込み口座を、新設しました。下記いたします。旧口座も当然保持しますが、振り込みは、どうか下記宛てに今後はお願いたします。

京都銀行 下鴨支店 (店番：142) 普通預金 口座番号 3385134
キョウトエネカン ダイヒョウ シングウ ヒデオ

ゆうちょ銀行 普通預金
店名 四四八 (ヨンヨンハチ)
店番 448
口座番号 1819039
シングウ ヒデオ
記号 14420 番号 18190391

ゆうちょ銀行 振替払込口座
口座記号 00900-9-
口座番号 235184
加入者名 新宮秀夫

エネカン会費

正会員	会費年額	1口	1000円	5口以上
賛助会員	会費年額	1口	1000円	1口以上
学生会員	会費年額		1000円	
団体賛助会員	会費年額	1口	1000円	10口以上



京都エネルギー環境研究協会（京都エネカン）
代表 新宮秀夫

〒606-0854 京都市左京区下鴨東岸本町38
TEL & FAX 075-722-1223
e-mail shingu@enekan.jp
HP <http://www.enekan.jp/>