エントロピーとは何か？Entropy　generalized

NPO 法人京都エネルギー環境研究協会代表 新宮秀夫 Hideo Shingu　2016/01/03、修正 2017/06/16

1. まえがき

情報理論においてシャノンが考えた確率の評価法の新概念の名称について、フォン・ノイマンがそれをエントロピーと呼べば良いとアドバイスし、その理由として“エントロピーが何か分かっている人はいない”からそう名付ければその考えが論議される時にいつも優位に立てる、と言ったという話は有名である（1）。この逸話が語られてから 50 年以上経つ現在でも、エネルギー学などの基礎として皆が利用しているエントロピー概念の単純明快でだれにもわかるような説明は示されていない。本稿では先ず、3 つのキーワード、

I　**「エントロピーとは数量を数そのものではなく、その桁で数えることである」**

II　**「数量の桁は数量の発揮する効用（utility）すなわちエントロピーを示す」**

III**「桁で数えるとは、数の対数をとることである」**

によってエンロトピーとは何かを簡明に提示して、その妥当性が様々な分野で成り立ち、利用されて来ていることを示そうとするものである。但し、ここで数量として考えるのは、単位物質量あたりの体積、一人当たりの所持金額、など密度・濃度（またはその逆数）として示される数である。

エントロピーという言葉は、変化、変易、を表すギリシャ語に由来するもので、熱力学の分野における命名だが数量の増減が如何にその効果に変化をもたらすかの指標として適切な表現だと言えよう。

この概念が数式を使って表わされた例の歴史をたどると、ダニエル・ベルヌーイの賭けの期待値と利得の効用についての 18 世紀始めの仕事（セント・ペテルスブルグの問題）に始まり(2)、ウェーバー・フェヒナーの刺激量変化の感知限界（弁別閾値）の法則(3)、経済学の限界効用逓減の法則(4)、それと同じ時期（19 世紀始め）のカルノーの熱効率式の発見(5)、ポグソンによる天文学における星の明るさの等級(6)、20 世紀になって地殻のずれによる放出エネルギーと地震の強さのマグニチュード(7)、情報確度のエントロピー表現の提示(8)、などがある。これらを調べるとそれぞれの分野で個々に、数量の桁を数えるとそれが効果・効用を表すことになる実例が示され、利用されて来たことがわかる。以下にさらに詳しくこのエントロピー概念の一般性を探って見よう。

2. 無次元化された量としてのエントロピー

2.1 基礎式

それぞれの分野において取り扱う対象の数量を x としてその基準値として任意に選んだ値を x_0 と表示し、エントロピーを S で表示するとき、下記の式が、すべての分野でのエンロトピー概念に共通している、

$dS/dx = \pm 1/x$・・(1)、　**$S = \pm \log_a(x/x_0)$**　・・(2)、　　**$dx/dS = \pm x$**・・(3)、 **$(x/x_0) = a^{\pm S}$**・・(4)

対数、指数の基数 a の大きさは分野ごとに選ばれるが、自然対数の底である e(= 2.71828・・・）以外を a とした場合の対数表現に付随する定数(= $\log_a e$)はエントロピー値に含ませれば上記のように統一した表現ができる（±の符号は分野による変数として x を使うか、1/x を使うかの選択によって決まる)。分野ごとに異なる名称で呼ばれるエントロピー概念を例示すると下記のようなものがある（これ以外にも存在し、新に定義することも可能である)、式(2) と(4) とは x を鏡にした逆関数なので、式 (1) ~ (4) は 1 つの概念と言えよう。

表 1

熱力学	x =	1 モルの物質の熱量(T),体積(V),或いは圧力(P)・	S =	部分モルエントロピー	$S_{partial}$
情報論	x =	ある事象の発生確率(P)・・・・・・・・・・・・	S =	自己エントロピー	S_{self}
経済学	x =	個人あるいは社会全体の資産額(¥)・・・・・・	S =	効用（Utility)	U
〃	x =	〃　〃　当たりへの物資供給量(Q)	S =	物資の価格	¥
医学、薬学	x =	個人への薬投与量(dose)、(= D) ・・・・・・・・	S =	薬効（Effect)	E
天文学	x =	1 個の星の光量(Lux)、(L) ・・・・・・・・・・・	S =	星の明るさ等級	M
地震学	x =	1 回の地震で解放される地殻エネルギー量(E)・	S =	マグニチュード	M
反応速度論	x =	反応物質濃度・密度(N) ・・・・・・・・・・・	S =	反応時間	t
技芸学	x =	個人の練習・鍛練量(n) ・・・・・・・・・・・・	S =	級位、段位	D
幸福論	x =	(個人、或いは社会)当たりの幸福量(H)・・・・	S =	幸福感（Sensation)	S_{happy}
		・・・・・・・・・・・・・・・・・			

要するに自然現象、社会現象を問わず、**数量 x の値が大きくなると**その数量に逆比例（＝1/x に比例）して、単位 x 量増減の x 全体に対するインパクト（重み、効果 = dS/dx）すなわち**単位 x あたりの S が小さくなる**、という式(1) で示される数学的自然法則が存在するのである。その結果、数量 x 全量の示す**効用・エントロピー S は**、dS を **x** で積分した量として、**x を対数で表した数（$S = \log_a x$）となる。**対数とは x を数値そのものではなく、a を基数として x を**“桁(けた)”**で示した値であるから、結局、**エントロピーS （数量 x の効用）は x の桁で示されことになる。a** の値には、分野により異なる x の変化する数値範囲の大小に応じて適当な定数が使われ

る。例としては、

熱力学：**a = e**（= 2.718・・）、情報論：**a = 2**、経済学：**a = 10**、天文学：**a = 2.51**、地震学：**a = 31.6** などがある。

2.2 負のエントロピーと熱力学第 3 法則

熱力学ではエントロピーは必ず正の値をとるとされている。その理由は、エントロピーS が、無次元量ではなく、dS = dq/T, で定義され、比熱と同じ次元（熱量/温度）を持つからである。q は原子・分子 1 モル当たりに含まれる熱量の指標であるから、比熱を C_h とすればこの式は、$dS = C_h dT/T$、となり、C_h が温度に依存せず一定の場合（室温付近以上）であれば式(1)と同じ関係になる。しかし C_h は低温では温度と共に小さくなり絶対 0 度で零となる。従って、比熱と同じ次元をエンロピーに与える通常の熱力学では、エンロトピーも絶対温度で零になるとされるのである（**熱力学第 3 法則**）。

しかし、無次元化された式(1)に基づくエントロピーでは、S が対数関数となるから、x の値が人為的に決める標準値 x_0 の値に等しければ、すなわち $x/x_0 = 1$ の時に S = 0 となる。その結果、$x/x_0 < 1$、において S の値は負（S < 0)となる。ここで注意すべきことは、**x_0 は 0 と∞ 以外の有限値でなければならない**から**熱力学第 3 法則は、$x/x_0 = 0$ において S = −∞ となることである**。現に天文学では、星の明るさの等級（マグニチュードと呼ばれる）は恒星ベガ、が 0 等星であり、北極星は 2.0、月は−12.5、太陽は−26.7 等星とされ、S すなわちマグニチュード M が正負の範囲で使われている。

エントロピーを無次元量として定義する式(1)を使っても、カルノー効率や化学ポテンシャルなど理想気体・固体の状態方程式 PV = RT に基づく基本的な熱力学の関係は保たれる。エントロピーの概念の基礎としては、一般化した無次元量として S を理解して、従来熱力学の低温での S の振舞いや、相変態に伴う S の増減は特種な条件下での比熱変化の問題として別に論ずることにすれば、エントロピー基礎概念の一般性が簡明直裁に理解できる。

2.3 真空(vacuum)、有限密度(finitum)、真密(densum)

標準値以上、以下、でのエントロピー値が正、負、になることを理解するためには、標準値として任意に選ぶ有限値を中心にして、無限大の数値、無限小の数値の概念を明確にしておくことが必要なので、これを分子の体積 V とその逆数(密度) 1/V を例に説明しておこう。

1 単位の真空(vacuum)とは、1 単位の空間（スペース）中に 0 単位の分子が存在する状態（密度が無限小)。したがって、1 単位の真空と 1 単位の標準状態（密度 1）の物質と混合すると 2 単位の空間スペースの中に分子が 1 モル（1 単位）存在する状態（密度が 0.5）となる。n 単位の真空と標準状態の物質とを混合すると、密度は 1/(n+1）になる。**無限の真空**（n = ∞)、では 1 単位（任意の有元量）の分子が無限の空間スペース中にあると理解出来る。V をお金、分子を人と見れば、標準状態は 1 人が 1 円所持の状態。真空は人がいなくてお金だけ 1 円ある状態。2 単位の真空はお金だけ 2 円ある状態と思えばよい。

1 単位の有限密度(finitum)とは、1 単位の空間（スペース）中に 1 単位の分子が存在（密度が有限値）する状態。したがって、n 単位の有限密度は n 単位の空間の中に 1 単位の物質が存在する状態である。有限密度の中の任意の値を標準状態に決めれば、他の有限密度値の大小はこの標準状態を基準にして決まる。V をお金とすれば、n 単位の有限密度は n 円を 1 人が持っている状態。

1 単位の真密(densum)とは、0 単位の空間（スペース）中に 1 単位の分子が存在する状態（密度が無限大)。したがって、1 単位の真密と 1 単位の標準状態（密度 1）の物質と混合すると 0.5 単位の空間スペースの中に分子が 1 モル（1 単位）存在する状態（密度が 2) となる。n 単位の真密と標準状態の物質とを混合すると、密度は（n+1）になる。**無限の真密**(n = ∞)、では 1 単位（任意の有限広さ）の空間スペース中に無限量の分子が存在すると理解出来る。V をお金とみると、1 単位の真密は所持金 0 の人が 1 人いること、n 単位の真密は所持金 0 の人が n 人いることに比較できる。無限の真密は、無限人の所持金が 1 円（百万円でも良い）すなわち有限円であること。

元来、真空とは物質密度が 0 = 1/∞ の状態であるが、密度 0 の空間（スペース）の大きさ（広さ）を真空領域の大きさ（単位で測れる）と見ることは分りやすい。それに対して、真密とは物質密度が ∞ = 1/0 の状態であり、その空間（スペース）は 0 である。0 のスペースの大きさ（単位）を数えることは不思議にも思える。上記のように、所持金 0 の人の人数を数えることはイメージできるから、それと比較すればスペース 0 の領域にも大小があると見ることは可能である。次に真空、真密の概念を使って混合のエントロピーの増減について考察する。

3. いわゆる“混合のエントロピー”について

第 2 節にのべた S は、対象として考える量 x が、基準として決める x_0 から増減する場合の、いわゆる部分エントロピー$S_{partial}$ あるいは自己エントロピーS_{self} と呼ばれる事柄についての説明であった。しかし S は多くの場

合基準とする x の量が 2 つあるいはそれ以上の部分に分けられた時のそれぞれの部分での S 値に、濃度（分け方の比率）を掛けて合計した値として論じられる。つまり決まった数量をどのように分けた時にそれぞれの部分のエントロピーの値の合計がどのように変化するかが問題とされるのである。

熱力学においてはこのような条件下での S は**混合のエントロピーS_{mix}**とされている（異種分子の混合による濃度分布の変化に応じて S 値が変化するから）。ただし、ドルトンの分圧の法則（異種分子は互いに真空のように振る舞う）にしたがって、他方の分子は一方の分子に広がるスペースを提供する（又はスペースを奪って狭める）役割を担っていると見れば、S_{mix} は標準状態の 1 種の分子（$x/x_0 = 1$）と真空（$x/x_0 = \infty$）との混合、あるいは 1 種の分子と真密（$x/x_0 = 0$）との混合、として式を理解することが出来る。情報論では、物事の起こる確率 P について$-\log_2 P$をS_{self}と定義して、起こらない確率 $1-P$ による$-\log_2(1-P)$との混合として、数式的には同じエントロピーがシャノンのエントロピーと呼ばれるが、本稿ではいずれも S_{mix} と呼んで説明を進める。

x の基準値（すなわち x = 1）と真密との混合の場合、基準値 1 を x と $(1-x)$、とに分けて置いたときの混合のエントロピーは、

$$S_{mix} = x\log x + (1-x)\log(1-x) \qquad 0 \le x \le 1 \quad \cdots\cdot(5)$$

となる。この場合には S_{mix} の値は負である。

そして、x の基準値（すなわち x = 1）と真空との混合の場合は式(5)の x を 1/x と置きなおして全体に負号をつけて、

$$S_{mix} = -[(1/x)\log(1/x)+(1-1/x)\log(1-1/x)] \quad 1 \le x \le \infty \quad \cdot\cdot(6)$$

となる。この場合には S_{mix} の値は正となる。

単位量物質の体積を V （熱力学におけるモル体積）と記して (5),(6) 式を適用してグラフにすれば図 1 のようになる。

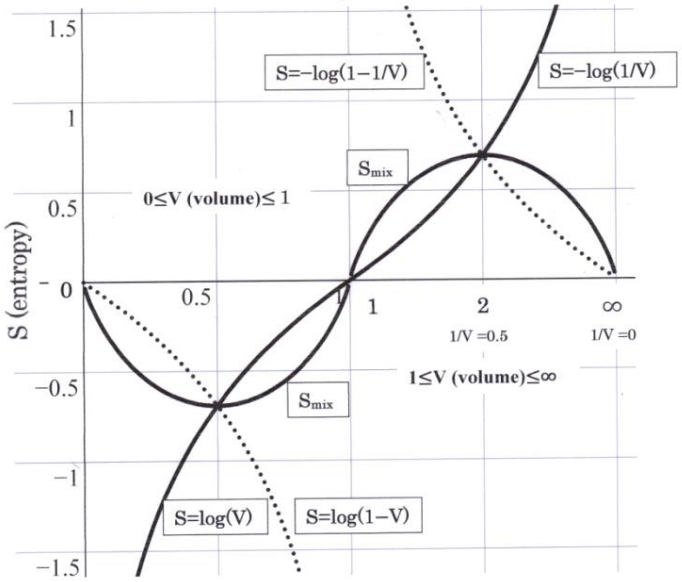

図 1　熱力学において 1 モルの物質が 2 つの部分に分かれて存在する場合の S_{mix} の変化。

$S_{mix} = V\log(V)+(1-V)\log(1-V), \qquad 0 \le V \le 1$

$\quad = -((1/V)\log(1/V)+((1-(1/V))\log(1-(1/V))) \qquad 1 \le V \le \infty$

S=log(V) は 1 つの部分に物質が存在すると見た場合の値（$= S_{partial}$：部分モルエントロピー= 式(2)）を示す。

4. “混合のエントロピー”の一般化

以上でエントロピー値の正負にわたる範囲での、部分モルエントロピー$S_{partial}$（自己エントロピーS_{self}）と混合のエントロピーS_{mix}の概念とが示されたので、今度はこれらのエントロピー概念は連続的に理解できることを示そう。

すなわち、標準状態の物質（体積、モル数が 1）が、様々な単位量 n の真空空間あるいは真密空間との間に分かれて存在する場合の、物質存在比率に応じたエントロピー値を示したのが図(2) である。図中に記入されている部分モルエントロピー$S_{partial}$ (S=logV) の曲線は図 1 中に記入した曲線と同一であるが、この曲線が、図 1 において混合エントロピー(S_{mix})の極大値、極小値を通っているのと同様に、図 2 においてもすべての n 値に場合に $S_{partial}$ は S_{mix} の極大値、極小値を通る。そして、$n = \infty$ において、エントロピー値は $V \ge 1$ のとき$+\infty$ になり、$V \le 1$ のとき$-\infty$となり、$S_{partial}$ と S_{mix} とが一致する。これにより $S_{partial}$ と S_{mix}（あるいは情報理論の S_{self} とシャノンのエントロピー）などが式(1) に示された 1 つの概念によって理解できることがわかる。

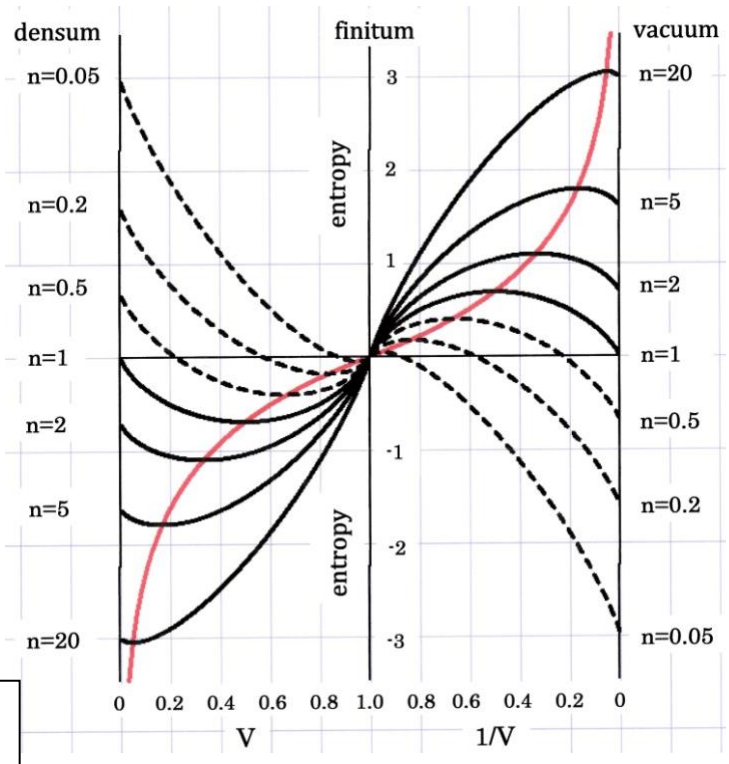

図 2　混合のエントロピーの極限が部分モルエントロピーとなることを示す図。

$S = -((1/V)\log(1/V)+(1-1/V)\log(1-1/V)/n)$:　$1 \le V \le \infty$

$S = V\log V+(1-V)\log(1-V)/n$:　$0 \le V \le 1$

5. 考察

5.1 数量の効用としてのエントロピー応用事例

5.1.1 商売の儲け率

ある農産物たとえばナスビを産地で仕入れて、消費地で販売する場合の儲け率を、エントロピー的に考えて見よう。式(1) に示された原理によれば、産地においてナスビが平均一人当たり n_2 個あるとすれば、その 1 個あたりの仕入れ価格（産地でのナスビ 1 個の効用・エントロピー）は $1/n_2$ に比例して決まる。他方、消費地ではナスビが平均一人あたり n_1 個あるとすれば、そこでの販売価格（消費値でのナスビ 1 個の効用・エントロピー）は $1/n_1$ に比例する。

儲け率は、η =（販売価格－仕入れ価格）/(販売価格）であると見なせば、

$\eta = (1/n_1 - 1/n_2)/(1/n_1) = 1 - (n_1/n_2)$

となる。実際の儲け額は、η ×総売上価格となるから，$n_2 = 100$ 個、$n_1 = 1$ 個、として、売り上げ額が 10,000 円であれば儲け額は$(1 - 1/100)\times 10{,}000 = 9{,}900$ 円という計算ができる。

ナスビが 1 人当たり n 個ある時の 1 人当たりのエントロピーは $S = \log_a(n)$ だから、a=10 とすれば、$n = 100$ の時には $S = 2$。$n = 0.01$ (100 人当たりにナスビが 1 個しかない）の時には $S = -2$ となりエントロピーは負。

5.1.2 熱機関の効率

カルノーの熱効率の計算も、温度を分子 1 モル当たりの熱エネルギー量と見れば、高温 T_2 での熱エネルギー1 ジュールあたりの効用・エントロピーは $1/T_2$ であり、低温 T_2 での同じ 1 ジュールの効用・エントロピーは $1/T_1$ となるから、熱エネルギーを動力として利用できる効率 η は、

$\eta = (1/T_1 - 1/T_2)/(1/T_1) = 1 - (T_1/T_2)$

として、どの教科書にも載っているカルノー効率の式が得られる。

温度が T の時の分子 1 モルのエントロピーは $S = \log(T)$ だから、$T = 100$ の時には $S = 4.6$、$T = 0.01$ の時には $S = -0.46$ となりエントロピーは負。但し基準絶対温度$(T = 1)$ はケルビンではなく比熱が温度依存しない温度。

要するに、ナスビの価格と儲け率、温度の差による熱から動力への変換率、などは数式上全く同一の、式 1～4 によっているから、数量の効用をエントロピーと見なすことの一般性が理解できる。

5.1.3 過去はエントロピー負の状態に相当するか? : 放射能の半減期

反応速度論における一次反応の式は、反応物質の濃度(あるいは密度) を N, 時間を t、k を反応速度定数 として、dNdt = −kN、 で与えられる。この式は式(3) において x を N、と置き S を t、と置き替えたものである。すなわち、数式上では時間をエントロピーと同じ変数と見なせることになる。

この関係が放射能の減衰反応に当てはまると見て考察しよう。図(3) に示したように、放射性同位元素を含む元素の中の放射性同位元素の濃度を N として、放射能が 1/e にまで減衰する時間を τ とすれば（放射能の半減期は$(\log_e 2)\,\tau$ となる）単位量の元素から放出される放射線の単位時間当たりの個数は $dN/dt = -N\tau$、となり、書き直すと $dt/dN = -\tau/N$、積分すれば $N = N_0 \exp(-t/\tau)$、が得られる。

これらの式は時間 t が τ になると濃度は N_0 の 1/e になることを示すが、逆に考えると時間を$-\tau$ まで過去に溯れば濃度は eN_0 になる。上述のように、時間 t は式の上ではエントロピーと同じ概念であり、無次元化濃度 N/N_0 が 1 以上（確率 1 以上と同じ概念）の場合を考えること、すなわち、負のエントロピーを取り上げることは、時間の過去すなわち歴史上の事柄を調べるという意味を持つことになっている。

実際上、天然ウラニウムは現在、半減期 44.7 億年の U_{238} が 99.27%、半減期 7.04 億年の U_{235} が 0.72%、そして少量の U_{234} からなっている。従って U_{238} と U_{235} との存在比の計算から過去 20 億年前には U_{235} の自然界での濃度が臨界に達することが可能な約 3.65%あって、アフリカのオクロ（ガボン共和国）の地層中で発見された天然原子炉の存在原因が明らかになっている。

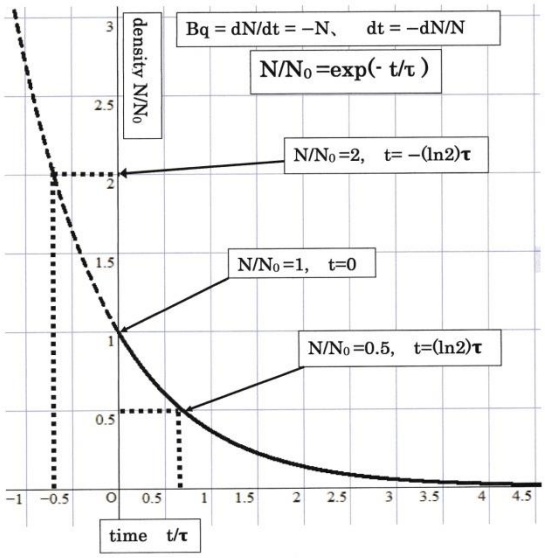

図 3　一次反応速度式の放射性同位元素濃度への適用

数式上は時間が過去無限大にまで溯れば濃度（物質密度と見ればよい）が無限大になるが、物質は素粒子から構成されているなどの条件があるので適当な過去で（エントロピーの負の値で）打ち切って考察せねばならない。数学と物理学との違いはこのような所と見ればよいのだろう。

5.2 エントロピーの統計力学的解釈

熱力学のエントロピーは、統計力学的な説明が一般的である。混合のエントロピーについてこれを考えると、N 個の分子が 2 つの部屋に別れた時、一方の部屋の分子数を n とすれば他方の部屋の分子数は(N − n)となる。このとき n の大きさに応じて分子の取り得る場合の数 Ω を数えると、統計的にそれは、

$\Omega = N!/((n!\ (N-n)!))$

となる。 階乗の数を連続数とみればこの場合の数 Ω も連続数とみなせる。

そして、エントロピーは数をそのままでなく、その桁（すなわち対数）で数えることである、という本稿の最初に述べた定義によって、場合の数の対数をとってそれを無次元化されたエントロピー S と置くと

$S = \log\Omega = \log N! - [\log(n!) + \log(N-n)!] = N\log N - [n\log(n) + (N-n)\log(N-n)]$

となり、N と n とを N で割って規格化(すなわち N = 1 と置く）して、n/N を 1/ x と書くと、

$S = -[(1/x)\log(1/x) + (1 - 1/x)\log(1 - 1/x)]$

となり、式(6) と合致する。

そして、分子のとり得る場合の数が 1 以下の時、すなわち $0<\Omega\leq 1$ については、体積 V についてのエントロピーを考えた時と同様に、Ω を 1/Ω に置きかえて式を書くと、

$S = \log(1/\Omega) = \log(n!\ (N-n)!/\ N!) = [\log(n!) + \log(N-n)!]/\ \log N! = [n\log(n) + (N-n)\log(N-n)] - N\log N$

となり、N と n とを N で割って規格化して n/N を x と書けば、

$S = (x)\log(x) + (1 - x)\log(1 - x)$

となり、式(5) と合致する。

統計力学における場合の数 Ω を本稿の始めに論じた式(1) における変数 x と見れば、$S = \log\Omega/\Omega_0$ という式は $dS/d\Omega = 1/\Omega$ すなわち、Ω が 1 単位増減するときの Ω 全体へのインパクト・効果・効用が Ω の値に反比例するという原理に基づいていることを表現している。すなわち、**統計的エントロピーは無次元化可能**なエントロピー表現だということになる。 したがって、物質 1 単位の体積 V が 1 以下の場合を混合のエントロピーについて考えたのと同様に、物質 1 単位の状態数も 1 以下の場合、例えば Ω/Ω_0 が 0.5 とか 0.1 の場合（1/Ω が 2 とか 10 とかの場合）も考慮する必然性が生まれる（図(2) 参照)。その意味を考えると、Ω はある有限量の物質当たりの場合の数であるから、適当に設定した有限温度(標準温度:T = 1)における Ω を Ω_0 と置いて標準に設定するならば、絶対零度では無限量の物質に対して状態が 1 の場合に相当することになり（図 2 における n = ∞ にあたる)、$\Omega/\Omega_0 = 0$ と置くべきことになる。そうなれば絶対零度でのエントロピーは−∞ となるのである。

5.3 可逆過程と不可逆過程、熱力学第 2 法則

自然現象の向かう方向はエントロピー増大を伴う（混合は均一化に向かう）という**熱力学第 2 法則**が教科書に見られる。比熱が温度に対して一定であるときは、エントロピーは対数関数で表されるから、2 つの状態 x_1, x_2 にある等量の物質が持つエントロピーの和は、$S = \log x_1 + \log x_2 = \log(x_1\ x_2)$となり（式(5,6) すなわち混合のエントロピーとの相違に注意)、$x_1 + x_2$ の値が一定であれば、$x_1 = x_2$ のときすなわち均一化したときに S は最大となる。これは x の値が 1 以上、以下すなわちエントロピーが正負の領域にわたって成り立つ法則である。なぜなら、関数 S = logx は $0< x <\infty$ の領域において上に凸だからである。

第 3,4 節で述べた混合のエントロピーについても、現在の状態を標準として、それと真空（有限、無限単位の）との混合を考える限りこれは正しい。しかし、標準状態と真密（有限、無限単位の）との混合では S_{mix} の曲線が $0< x <1$ において上に凹となり、均一化には向かうがエントロピーは極小値に向かって減少するから**熱力学第 2 法則は修正する必要が生ずる**（図(2.3) 参照)。

混合のエントロピーは、体積が膨張してエントロピーが増大して極大に至る場合（真空との混合）には体積膨張に際して起こる仕事のエネルギーが外部に取り出された場合は、分子の温度は低下する。すなわち、温度を不変に保つためには外部へ取り出された仕事エネルギー量と同じ量の熱エネルギーを外部から注目する分子へと供給する必要がある。このプロセスでは、仕事エネルギーが熱エネルギーに変換されたのであり、仕事から熱にエネルギーが変換するのは自然のルールなのだと理解できる。

それに対して、全体積が縮小してエントロピーが負になる場合（真密との混合）には、外部から仕事を受けて体積が縮小し、その場合に発生する熱を外部に取り出すことによって、分子の温度が一定に保たれる。あるいは、内部の熱エネルギーが自然に仕事に置き換わって、物質を圧縮してエントロピーが減少する事態が起こったと見なせる。

通常エントロピー増大は、あるプロセスの不可逆性の指標とされている。そして減少するのは時間の矢が逆転する時であるとされている。しかし、無次元化エントロピーの解釈ではエントロピーが減少するのは、標準状態の物質を真密と混合する時であるということになる。このエントロピー減少は不可逆であり、時間の矢が現在の通りの条件下で起こる。ただ、エントロピー増大の条件では仕事エネルギーが自然に熱に変わり、エントロピー減少の条件では、熱エネルギーが仕事エネルギーに自然に変わるということになる。これは世界が真空に支配されているか、真密に支配されているか、の違いと解釈できるのかもしれない。宇宙はおよそ真空に近いと思われ

る。しかしブラックホールのような真密に近い場所もあり、それにも大小があると教えられているから、物理的な第 2 法則も条件次第なのかも知れない。しかし数式上は式(5,6) は首尾一貫しているから、式の意味にあわせた物理的解釈を考案することも意味があるであろう。前節で状態の数 Ω の 1 以下を考えたことと同様に、情報論においても確率 2 とか確率無限大、ということも式の上だけでなく実際的な解釈ができるはずである。

このようにエントロピーを示す対数関数の引数として数量 x/x_0 が 1 以下の場合を考えることや、無次元化したエントロピー表現 について触れようとした文献もある(9,10)。これらも従来の熱力学についての疑問を投げかける試みとしては価値あるが、そのような考察をするならば本稿に示したように、エントロピーの負値や、混合エントロピーの減少、すなわち熱力学第 2,3 法則の見直しにまで考察を広げて、対象とする数量の有限値と、零（真密)、無限（真空）との関係の考察に立った一般性のあるエントロピー概念が示されなければならない。

6. 総括

本稿で述べた無次元化されたエントロピーの考察の要点を再記すると、

I　如何なる数量 x もその 1 個増減の全体 x に対するインパクトは 1/x に比例する($dS = dx/x$)。

II　1 個増減のインパクトを積分した値は数量 x 全体の効果、効用、エントロピーを示す($S = \log_a x/x_0$)。

III　これらの帰結として「$x/x_0 = 1$ （標準状態）で $S = 0$」、「$x = 0$（真密状態）では $S = -\infty$」、「$1/x = 0$（真空状態）では　$S = \infty$」となり、 熱力学第 3 法則を見直す必然性が生ずる。

IV　混合のエントロピーの値は、標準状態と真空との混合では均一化によりエントロピーは増大するが、標準状態と真密との混合では均一化によりエントロピーは減少し、熱力学第 2 法則は解釈の修正が必要となる。

V　無次元化エントロピーの適合する自然現象、社会現象は一般性があり、熱力学においてもこのような理解を踏まえて、比熱次元のエントロピーを見直せば理解が容易になるであろう。

小学校 4 年生の理科の時間に「1 等星 1 個は、6 等星 100 個分の明るさがある」と教えるという記事を新聞で見た。これは 1856 年にポグソンが決めた星の等級が 1 上がると星の光量が 2.512 倍になる($2.512^5 \cong 100$ となること）という計算によっている(6)。つまり星 1 個の光量を 2.512 という基数を使った“桁”で数えるとそれが、明るさの感覚、すなわち光量の示す効用、すなわちエントロピー、すなわちその星の等級（マグニチュード）になるということである。式で書けば、光量を L として、$dS = -dL/L \rightarrow S = -\log_{2.512}(L/L_0)$ となる（L_0 は 0 等星＝恒星ベガの放つ光量)。星の等級の考えは古代ギリシャのヒッパルコスまで遡れるらしいから、昔から人間は数量の桁が効果を表すというエントロピー的な効果の数え方をして来たことがわかる。

このように、数量 1 単位の効果・インパクト・重みは数量全体の大きさに逆比例するという自然の原理が、数量全体の効用は数量のケタで示せるという結果を生むこと、そしてケタで示された効用をエントロピーと呼んで、それをあらゆる物事の価値の在り方、その変化の仕方を考える指標とすることは、長い人生をこれから歩んで行く小学生に教えるべき重要かつ簡単明瞭な智慧なのである。

7．参考文献

(1) M.Tribus, E.C.McIrvine, "Energy and information" Scientific American, 224 (September 1971).

(2) Daniel Bernoulli : "Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis" Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petrapolitanae, Tomas V, (1738), pp175-192. ECOMOMETRICA (Journal of the Econometric Society, "Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk": Translated by Dr. Louise Sommer, (1954) pp23-36).「セントペテルスブルグの問題」吉田裕亮：数学セミナー（1993）pp. 32-35.

(3) G.Fechner "Elements of Psychophysics vol.1"(1859): Translated by H.E.Adler, Henry Holt Edition in Psychology (1966)197.

(4) W. Stanley Jevons: The Theory of Political Economy (1871): Reprint. Edited by R. D. Collison Black. Harmondsworth: Penguin Books, 1970.

(5) Sadi Carnot: Réflexions sur la puissance motrice du feu, Paris (1824).「カルノー・熱機関の研究：訳と解説」広重徹､みすず書房（1973)。

(6) Norman Pogson: The Definition of Stellar Magnitude (1856): D. Jones, : Astronomical Society of the Pacific Leaflets, Vol. 10, No. 469, No. 469, p. 145-152 (1967).

(7) Charles F. Richter: An Instrumental Earthquake Magnitude Scale, Bulletin of Seismological Society of America, Vol.25, January, (1935) No.1

(8) Shannon, Claude E. ″A Mathematical Theory of Communication″ Bell System Technical Journal **27** (3): 379–423, *(July–October 1948).*

(9) G.S.Rushbrooke："Introduction to statistical mechanics" Chapter 9, Oxford at the Clarendon press (1951). "統計力学”第 9 章 5 節、久保昌二、木下達彦　共訳、白水社(1955).

(10) Arieh Ben-Naim：　"Entropy Demistified", World Scientific Pub. Co Pte.Ltd. (2008) Chapter 7. “エントロピーがわかる”中嶋一雄　訳、第 7 章、講談社　ブルーバックス (2012).